

## PROCESSI STOCASTICI E LORO CARATTERISTICHE SPETTRALI

Un segnale deterministico è caratterizzato da una “traiettoria” predefinita che attraversa il tempo e lo spazio. In altri termini, le fluttuazioni del segnale sono completamente descritte da una relazione funzionale che consente di ricavare il valore esatto ad ogni istante di tempo passato, presente e futuro. Sfortunatamente, la realizzazione di segnali deterministici richiede di poter esplicitare parametri la cui conoscenza è molto costosa o addirittura impossibile.

Per questo motivo si ricorre a segnali *probabilistici* (o *casuali*) che sono invece caratterizzati da fluttuazioni imprevedibili e per i quali non è possibile formulare una funzione che consenta di predire con esattezza i valori futuri a partire dalla storia passata.

Va tuttavia ricordato che la stocasticità è alla base della nozione di informazione; i segnali che convogliano informazione sono infatti i segnali casuali e non deterministici, per i quali l’informazione convogliata risulta nulla. Molta parte dell’attività nell’ambito delle telecomunicazioni o dell’elaborazione del parlato, del suono, video ecc., è relativa all’estrazione di informazione da segnale rumoroso, corrotto cioè da rumore intrinsecamente generato dal mezzo trasmissivo o dagli apparati coinvolti.

Un modello per i segnali probabilistici che risulta utile per descrivere un fenomeno aleatorio in evoluzione nel tempo è quello di *processo stocastico*. Tale nozione viene introdotta nel primo paragrafo in cui è data la definizione di processo stocastico in termini di famiglia

di segnali  $\{X(t, r)\}$ , a tempo discreto o continuo, in cui l'indice  $r$  varia sullo spazio delle possibili realizzazioni, dotato di una misura di probabilità. Si introduce altresì il concetto di media temporale e spaziale; vengono poi discusse alcune statistiche come la media, la varianza, l'autocorrelazione e la correlazione incrociata.

Il secondo paragrafo è dedicato allo studio dei processi stazionari. Le proprietà della funzione di autocorrelazione sono applicate alla progettazione di algoritmi per la stima di ritardo temporale.

Il terzo paragrafo introduce la nozione di sistema ergodico; viene in particolare segnalato come una stima della media e della funzione di autocorrelazione possa essere ottenuta mediante la media e l'autocorrelazione temporale.

L'ultimo paragrafo presenta alcuni elementi di analisi in frequenza di processi stocastici stazionari. Si introduce lo spettro di potenza di un segnale casuale, che descrive il contributo delle varie frequenze alla potenza media complessiva; si mostra infine come esso risulti la trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione del segnale casuale.

## 9.1 Processi Stocastici

Se proviamo a pronunciare varie volte una parola, per esempio "arpa", si può osservare che i segnali ottenuti per veicolare la parola sono in generale diversi; ogni possibile segnale ottenuto dalla ripetizione di questo esperimento verrà chiamato *realizzazione* della parola. Non possiamo dunque modellare il segnale corrispondente ad "arpa" attraverso un segnale deterministico, in quanto diverse realizzazioni della parola portano a diversi segnali: possiamo elencare tutte le possibili realizzazioni solo in linea di principio, e per denotarle, le indicizziamo con la variabile  $r$ . Denoteremo con  $f(t, r)$  il segnale deterministico corrispondente alla realizzazione  $r$ .

Una modellazione più precisa può essere ottenuta associando ulteriormente all'insieme delle realizzazioni una misura di probabilità. Questa può essere introdotta come segue:

- Se l'insieme delle realizzazioni  $\{r_1, \dots, r_m\}$  è finito, si associa ad ogni realizzazione  $r_i$  la sua probabilità  $p(r_i)$ :

$$p(r_i) = \Pr [r_i].$$

Naturalmente, vale che  $0 \leq p(r_i) \leq 1$  e  $\sum_{i=1}^m p(r_i) = 1$ .

- Se l'insieme delle realizzazioni è infinito, si può considerare la probabilità  $dP(t, \gamma)$  che un segnale preso a caso abbia al tempo  $t$  un valore compreso tra  $\gamma$  e  $\gamma + d\gamma$ :

$$dP(t, \gamma) = \Pr [\gamma \leq f(t, r) \leq \gamma + d\gamma].$$

Vale che  $\int_{-\infty}^{+\infty} dP(t, \gamma) = 1$ .

Questo porta alla nozione di *processo stocastico*.

**Definizione 9.1.** *Un processo stocastico  $\{X(t, r)\}_{t \in T}$  è una famiglia di variabili aleatorie indicizzate con un parametro  $t \in T$  (tempo). Se  $T \subseteq \mathbb{R}$  il processo è detto a tempo continuo, se  $T \subseteq \mathbb{Z}$  è detto a tempo discreto;  $r$  individua una particolare realizzazione del processo stocastico.*

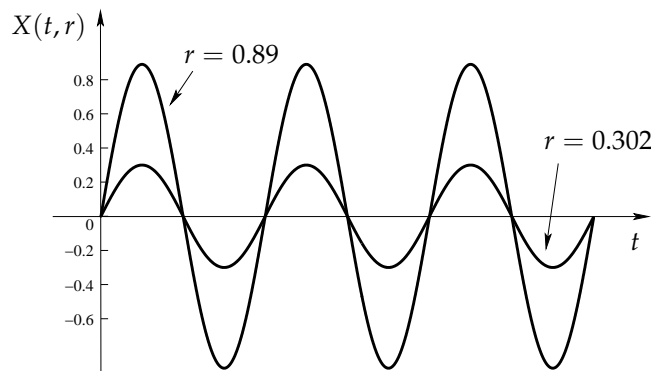
Per questioni di semplicità notazionale, spesso denoteremo il processo stocastico direttamente con  $X(t)$ , sottintendendo la variabile che individua la particolare realizzazione.

**Esempio 9.1.1.**

Il processo

$$X(t, r) = r \sin \omega_0 t,$$

con  $r$  uniformemente distribuito nell'intervallo  $[0, 1]$ , è un semplice esempio di processo stocastico a tempo continuo. Tutte le realizzazioni sono sinusoidi di fissata frequenza  $\omega_0$ ; le realizzazioni differiscono per l'ampiezza  $r$ . La Figura 9.1 mostra due differenti realizzazioni del processo.

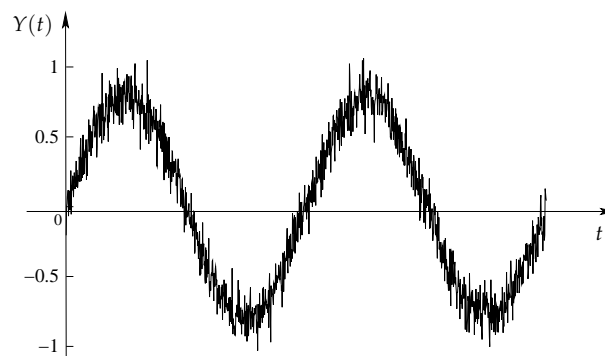


**Figura 9.1** Due realizzazioni distinte del processo  $X(t, r) = r \sin \omega_0 t$ , con  $r = 0.89$  e  $r = 0.302$ .

Se, a partire dal processo precedente, vogliamo modellare il processo che descrive l'onda sinusoidale mostrata da un'oscilloscopio e disturbata da rumore additivo  $N(t)$  di origine gaussiana, ricaviamo:

$$Y(t, r) = r \sin \omega_0 t + N(t).$$

La Figura 9.2 illustra una realizzazione in cui la variabile aleatoria  $N(t)$  ha una distribuzione gaussiana con media 0 e deviazione standard 0.1.



**Figura 9.2** Realizzazione del processo  $Y(t) = 0.79 \sin \omega_0 t + N(t)$ . La variabile  $N(t) \sim \mathcal{N}(0, 0.01)$ .

È opportuno osservare che un processo stocastico può essere visto in due modi diversi.

1. Fissata la realizzazione  $r_0$ ,  $x(t, r_0) = X(t, r_0)$  risulta essere un segnale deterministico; si noti l'uso della minuscola  $x(t, r_0)$  (o anche  $x(t)$ ) per denotare il segnale corrispondente ad una data realizzazione. L'insieme delle realizzazioni è spesso chiamato

spazio delle fasi o spazio delle realizzazioni o, in inglese, *ensemble*. La Figura 9.3 illustra un esempio di processo, evidenziando alcune realizzazioni.

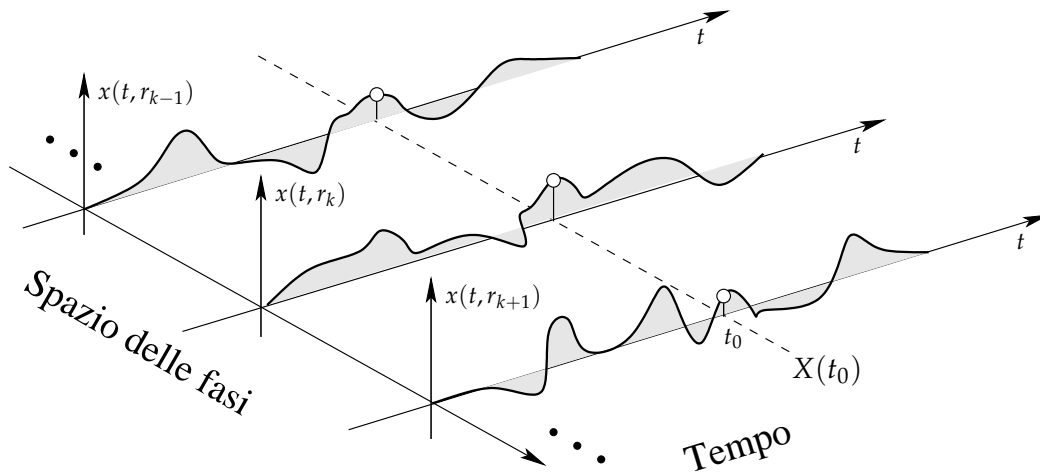


Figura 9.3 Alcune realizzazioni di un processo stocastico avente spazio delle fasi numerabile.

2. Fissato il tempo  $t_0$ ,  $X(t_0, r)$  risulta essere una variabile aleatoria; come detto, spesso denoteremo con  $X(t)$  detta variabile, tralasciando di esplicitare la realizzazione  $r$  e il tempo di osservazione  $t_0$ . In Figura 9.3 sono evidenziati alcuni valori assunti dalla variabile  $X(t_0)$  all'istante di osservazione  $t_0$ .

Per ogni  $t$ , chiameremo *media di fase* o *valor medio* l'aspettazione  $E[X(t)]$  della variabile aleatoria  $X(t)$ . Si noti che la media di fase è una funzione  $M_X(t)$  di  $t$ .

Richiamando la definizione di aspettazione, se le realizzazioni sono finite o discrete e  $p(r)$  è la probabilità della realizzazione  $r$ , allora:

$$E[X(t)] = \sum_r X(t, r)p(r).$$

Se le realizzazioni sono su un insieme continuo e

$$dP(t, \gamma) = f_X(t, \gamma) d\gamma = \Pr\{\gamma \leq X(t, r) < \gamma + d\gamma\},$$

allora:

$$E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma f_X(t, \gamma) d\gamma.$$

### Esempio 9.1.2.

Se consideriamo il processo a tempo discreto  $\{X(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  relativo al valore delle azioni di Google quotata presso il Nasdaq in istanti di tempo prefissati (per es. all'apertura di contrattazione giornaliera), possiamo cogliere meglio questo fondamentale doppio punto di vista insito nel concetto di processo.

- Da un lato, fissato  $n = n_0$ , possiamo avere informazione sul valor medio o sulla deviazione standard della variabile  $X(n_0)$  caratterizzata dalla funzione densità di probabilità  $f_X(n_0, x)$ .

- Dall'altro, possiamo osservare una realizzazione (per es. in un anno), già accaduta o che può potenzialmente accadere, di dimensione  $m$ , cioè una sequenza specifica di valori  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , da cui calcolare la media o la varianza temporale.

### 9.1.1 Caratterizzazione Statistica di un Processo

Se si considerano diversi istanti di tempo  $t_1 < t_2 < \dots < t_n \in T$ , con  $n \in \mathbb{N}$ , si ottiene il vettore aleatorio  $\mathbf{X}(t) = [X(t_1), \dots, X(t_n)]$  la cui *descrizione statistica completa* è data dalla distribuzione di probabilità di ordine  $N$  del processo

$$F_{\mathbf{X}}(t_1, \dots, t_n; \gamma_1, \dots, \gamma_n) = \Pr [X(t_1) \leq \gamma_1, \dots, X(t_n) \leq \gamma_n]. \quad (9.1)$$

Si noti che la (9.1) può essere definita per ogni  $n$ -pla di tempi  $t_i$  e per ogni  $n$ -pla di valori  $\gamma_i$ , per questo motivo è definita come funzione di entrambe le  $n$ -ple di variabili.

Sono ovviamente possibili delle descrizioni alternative alla famiglia di distribuzioni congiunte che si ottiene al variare di  $n$ . In particolare, se ogni  $n$ -pla di variabili aleatorie estratte dal processo corrisponde ad un vettore aleatorio continuo, possiamo definire la famiglia delle densità di probabilità

$$f_{\mathbf{X}}(t_1, \dots, t_n; \gamma_1, \dots, \gamma_n) = \frac{\partial^N F_{\mathbf{X}}(t_1, \dots, t_n; \gamma_1, \dots, \gamma_n)}{\partial \gamma_1 \dots \partial \gamma_n} \quad (9.2)$$

Se, in alternativa, ogni  $n$ -pla di variabili aleatorie estratte dal processo costituisce un vettore aleatorio discreto, che assume con probabilità 1 valori in un insieme discreto  $\mathcal{A}$ , allora possiamo definire la famiglia di distribuzioni di massa

$$p_{\mathbf{X}}(t_1, \dots, t_n; \gamma_1, \dots, \gamma_n) = \Pr [X(t_1) = \gamma_1, \dots, X(t_n) = \gamma_n]. \quad (9.3)$$

In definitiva, dunque, un processo aleatorio viene completamente descritto dal punto di vista statistico se si specifica la descrizione statistica di ogni vettore che si ottiene estraendo da esso una  $n$ -pla qualsiasi di variabili aleatorie. Dovrebbe essere chiaro che se è nota la descrizione statistica completa, siamo in grado di caratterizzare dal punto di vista statistico il processo aleatorio e quindi la classe di segnali che il processo modella.

Specificare la descrizione statistica completa tramite l'intera famiglia delle distribuzioni risulta, in molti casi, un compito difficile se non impossibile, per il fatto che non sempre è possibile produrre modelli accurati per i segnali in un sistema. In molte applicazioni ci si accontenta allora di una descrizione statistica parziale, ovvero limitata alla distribuzione del secondo ordine o, ancor più semplicemente, basata sui primi due momenti delle variabili coinvolte richiamati nella seguente:

**Definizione 9.2.** Dato un processo  $X(t)$ , il valor medio  $M_X(t)$ , la varianza  $V_X(t)$  e la funzione di autocorrelazione  $R_{XX}(t, s)$  sono definiti rispettivamente da:

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E[X(t)] \\ V_X(t) &= E[(X(t) - M_X(t))^2] \\ R_{XX}(t, s) &= E[X(t)X(s)], \end{aligned}$$

dove  $t$  e  $s$  sono due tempi appartenenti all'insieme di indici su cui è definito il processo. Dati due processi  $X(t)$  e  $Y(t)$ , la funzione di crosscorrelazione  $R_{XY}(t, s)$  è data da:

$$R_{XY}(t, s) = E[X(t)Y(s)].$$

La media del processo aleatorio fornisce, per ogni istante  $t$ , la media statistica della variabile  $X(t)$  e quindi dà informazioni sul valor medio delle realizzazioni del processo ad un certo istante. L'autocorrelazione e la crosscorrelazione forniscono invece informazioni sulla media del prodotto dei campioni delle realizzazioni dei processi (o all'interno dello stesso processo) in due istanti prefissati.

### Esempio 9.1.3.

Dato il processo stocastico

$$X(t) = \alpha \sin \omega_0 t + \beta \cos \omega_0 t,$$

dove  $\alpha$  e  $\beta$  sono variabili aleatorie indipendenti e uniformi in  $[0, 1]$ , calcolarne la media e l'autocorrelazione.

Il valore atteso è:

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E[\alpha \sin \omega_0 t + \beta \cos \omega_0 t] \\ &= E[\alpha] \sin \omega_0 t + E[\beta] \cos \omega_0 t = 0.5(\sin \omega_0 t + \cos \omega_0 t), \end{aligned}$$

dove 0.5 è il valore atteso delle variabili  $\alpha$  e  $\beta$  definite su  $[0, 1]$ , visto che in generale il valore atteso di una variabile casuale distribuita uniformemente su un intervallo  $[a, b]$  è  $(b - a)/2$ .

La funzione di autocorrelazione risulta:

$$\begin{aligned} R_{XX}(t, s) &= E[(\alpha \sin \omega_0 t + \beta \cos \omega_0 t)(\alpha \sin \omega_0 s + \beta \cos \omega_0 s)] \\ &= E[\alpha^2] \sin \omega_0 t \sin \omega_0 s + E[\beta^2] \cos \omega_0 t \cos \omega_0 s + E[\alpha\beta] \sin \omega_0(t + s) \\ &= \frac{1}{3} \cos \omega_0(t - s) + \frac{1}{4} \sin \omega_0(t + s), \end{aligned}$$

essendo il valor medio del quadrato di una variabile casuale distribuita uniformemente su un intervallo  $[a, b]$  dato da  $E[\alpha^2] = (b^3 - a^3)/(3(b - a))$  e il valore atteso  $E[\alpha\beta] = E[\alpha]E[\beta]$  per l'indipendenza. Se poniamo  $s = t + \tau$  abbiamo:

$$R_{XX}(t, t + \tau) = \frac{1}{3} \cos \omega_0 \tau + \frac{1}{4} \sin \omega_0(2t + \tau).$$

Due processi aleatori  $X(t)$  e  $Y(s)$  sono detti *indipendenti* se, per ogni  $t$  e  $s$ , le variabili aleatorie  $X(t)$  e  $Y(s)$  sono indipendenti; in tal caso la distribuzione di probabilità congiunta può essere fattorizzata come segue:

$$F_{XY}(t, s; \gamma_1, \gamma_2) = F_X(t; \gamma_1)F_Y(s; \gamma_2).$$

È immediato verificare che se due processi sono indipendenti sono anche *scorrelati*, cioè anche la funzione di crosscorrelazione fattorizza:

$$R_{XY}(t, s) = E[X(t)Y(s)] = E[X(t)]E[Y(s)].$$

Occorre precisare anche che i processi indipendenti sono scorrelati, mentre non è in generale vero il viceversa.

**Esempio 9.1.4.**

Si consideri un processo  $Y(t) = X(t) + N(t)$ , ottenuto sommando ad un processo  $X(t)$ , a media  $M_X$  e varianza  $V_X$ , un rumore  $N(t)$  a media 0 e varianza  $V_N$ . Il processo  $Y(t)$  ha media  $M_Y(t) = M_X(t)$  e, se  $X(t)$  e  $N(t)$  sono scorrelati, varianza  $V_Y(t) = V_X(t) + V_N(t)$ . Infatti:

$$M_Y(t) = E[X(t) + N(t)] = E[X(t)] + E[N(t)] = M_X(t),$$

$$\begin{aligned} V_Y(t) &= E[(Y(t) - M_Y(t))^2] = E[(X(t) + N(t) - M_X(t))^2] \\ &= E[(X(t) - M_X(t))^2] + 2E[N(t)(X(t) - M_X(t))] + E[N^2(t)] \\ &= V_X(t) + 2E[N(t)]E[X(t) - M_X(t)] + V_N(t) \\ &= V_X(t) + V_N(t). \end{aligned}$$

## 9.2 Processi Stocastici Stazionari

Nella sezione precedente abbiamo visto che i parametri statistici che caratterizzano un processo, come ad esempio la sua media o la sua autocorrelazione, dipendono in generale dall'istante di osservazione. In molte applicazioni non ha tuttavia senso specificare esattamente l'istante in cui ha inizio l'osservazione del fenomeno: ci si può aspettare ad esempio che il rumore presente in un sistema di trasmissione (anch'esso modellato tramite un processo aleatorio) presenti delle caratteristiche in larga parte indipendenti dal tempo. Se si misura il rumore in questo istante oppure fra qualche ora, ci si aspetta di ritrovare gli stessi valori, almeno fintanto che le condizioni di misura e il sistema che fornisce la relazione ingresso-uscita rimangono gli stessi.

In questa sezione forniremo la definizione del concetto di invarianza dei parametri statistici rispetto al tempo di osservazione mediante la nozione di stazionarietà di un processo stocastico.

Informalmente, diremo che un processo stocastico  $X(t)$  è *stazionario in senso stretto* se tutti i suoi parametri statistici sono tempo-invarianti. Ciò significa che per ogni  $t_1 < t_2 < \dots < t_n \in T$ ,  $n \in \mathbb{N}$  e  $\tau \in \mathbb{R}$ :

$$\Pr[X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_n) \leq x_n] = \Pr[X(t_1 + \tau) \leq x_1, \dots, X(t_n + \tau) \leq x_n].$$

o, equivalentemente

$$F_X(t_1, \dots, t_n; \gamma_1, \dots, \gamma_n) = F_X(t_1 + \tau, \dots, t_n + \tau; \gamma_1, \dots, \gamma_n).$$

Osservando attentamente l'espressione precedente, ci si accorge che i processi  $X(t)$  e  $X(t + \tau)$  hanno la stessa caratterizzazione statistica, suggerendo quindi l'idea che non ha più importanza l'inizio dei tempi di osservazione. Infatti la proprietà di invarianza mette in luce quell'aspetto che dice che la famiglia di distribuzioni associata ad un processo stazionario dipende solamente dalla differenza dei tempi di osservazione e non da un istante di riferimento  $t_0$ . Ne consegue che tutte le statistiche, tra cui media, varianza e autocorrelazione, sono tempo-invarianti.

Un esempio di processo stazionario a tratti e non stazionario nel complesso è offerto in Figura 9.4: i parametri statistici non cambiano nei rispettivi blocchi, ma cambiano in modo evidente nel confronto tra i due blocchi.

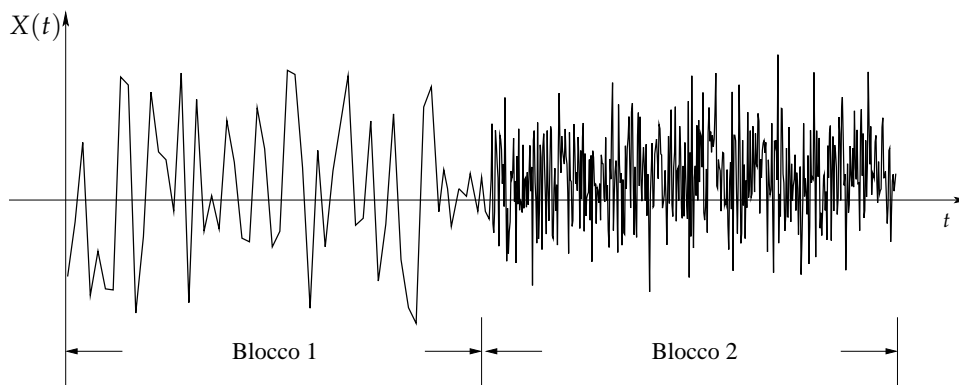


Figura 9.4 Processo non stazionario.

La nozione di stazionarietà qui richiamata richiede la conoscenza delle distribuzioni congiunte di vettori aleatori di ordine  $N$  per tutti gli  $N$  possibili; nel seguito faremo riferimento ad una nozione di stazionarietà meno restrittiva, cioè quella riferita alle distribuzioni di ordine due.

In termini più formali, si richiede che

$$F_X(t_1, t_2; \gamma_1, \gamma_2) = F_X(t_1 + \tau, t_2 + \tau; \gamma_1, \gamma_2).$$

per ogni valore di  $t_1, t_2$  e  $\tau$ . Ponendo  $\tau = -t_1$  si ottiene

$$F_X(t_1, t_2; \gamma_1, \gamma_2) = F_X(0, t_2 - t_1 + \tau; \gamma_1, \gamma_2)$$

facendo dipendere la distribuzione solamente dalla differenza degli istanti di osservazione. Come conseguenza la media di fase diviene

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma f_X(t; \gamma) d\gamma = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma f_X(0; \gamma) d\gamma = M_X,$$

rendendola costante e quindi indipendente dal tempo. Per la correlazione, presi due istanti di tempo  $t$  e  $t + \tau$ , si ha:

$$\begin{aligned} R_{XX}(t, t + \tau) &= E[X(t)X(t + \tau)] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_1 \gamma_2 f_X(t, t + \tau; \gamma_1, \gamma_2) d\gamma_1 d\gamma_2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_1 \gamma_2 f_X(0, \tau; \gamma_1, \gamma_2) d\gamma_1 d\gamma_2 \\ &= R_{XX}(\tau), \end{aligned}$$

che dimostra che in caso di stazionarietà del secondo ordine, la funzione di autocorrelazione dipende solamente dalla differenza dei tempi di osservazione.

Queste due ultime derivazioni costituiscono, nella pratica, la forma (debole) di stazionarietà richiesta nella gran parte delle applicazioni, come riportato nella seguente

**Definizione 9.3.** Un processo stocastico  $X(t)$  è detto stazionario (in senso lato) se la media e la funzione di autocorrelazione sono tempo invarianti:

$$\begin{aligned} E[X(t)] &= M_X = \text{costante}, \\ E[X(t_1)X(t_2)] &= R_{XX}(t_1 - t_2), \quad (\text{per ogni } t_1 \text{ e } t_2). \end{aligned}$$



In un processo stazionario la media di fase risulta quindi indipendente dal tempo, mentre la autocorrelazione  $E[X(t_1)X(t_2)]$  dipende solo dalla differenza  $\tau = t_1 - t_2$ . In altre parole, le proprietà dell'autocorrelazione di un processo stazionario restano invariate in media, e quindi non dipendono dall'intervallo temporale su cui vengono calcolate. Se consideriamo due blocchi di dati di dimensione  $N$ , come in Figura 9.5, ci aspettiamo che aspettazione e autocorrelazione estratte dai due blocchi siano mediamente le stesse, indipendentemente dalla distanza temporale relativa tra i blocchi.

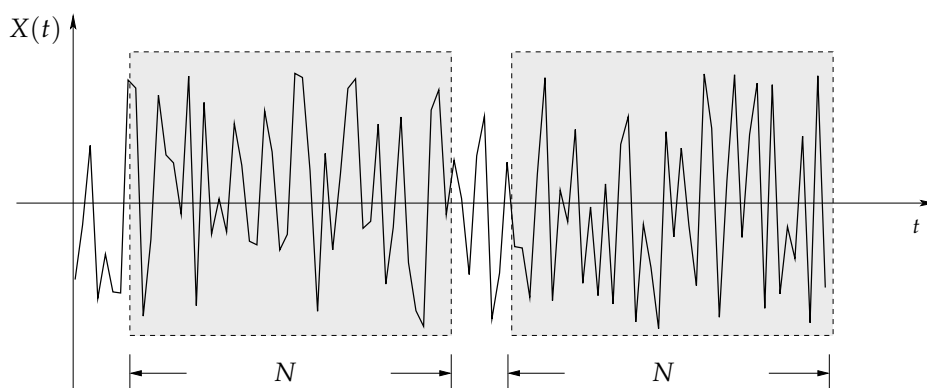


Figura 9.5 Blocchi di dati di un processo stazionario.

Analogamente diremo che due processi stocastici  $X(t)$  e  $Y(t)$  sono *congiuntamente stazionari* (in senso lato) se sono stazionari in senso lato e la funzione di cross-correlazione è tempo-invariante:

$$E[X(t)Y(t + \tau)] = R_{XY}(\tau), \quad (\text{per ogni } t \text{ e } \tau).$$

### Esempio 9.2.1.

Dato il processo  $X(t) = r \cos(\omega_0 t)$  con  $r$  distribuito uniformemente su  $[-1, 1]$ , dire se è stazionario in senso lato.

La media del processo risulta:

$$M_X(t) = E[r \cos(\omega_0 t)] = E[r] \cos(\omega_0 t) = 0,$$

dato che  $r$  è una variabile casuale a media nulla. Dunque il processo risulta stazionario in media. Per quanto riguarda la funzione di autocorrelazione si ha:

$$\begin{aligned} R_{XX}(t, t + \tau) &= E[X(t)X(t + \tau)] = E[r^2] \cos(\omega_0 t) \cos(\omega_0(t + \tau)) \\ &= \frac{1}{3} \cos(\omega_0 t) \cos(\omega_0(t + \tau)), \end{aligned}$$

dato che il momento secondo della variabile  $r$  è  $r^2/12$ . Si può concludere che il processo non risulta essere stazionario al secondo ordine perché  $R_{XX}(t, t + \tau)$  dipende dall'istante  $t$ .

Per processi stocastici stazionari la funzione di autocorrelazione ha le seguenti proprietà:

1.  $R_{XX}(0) = E [X^2(t)]$  (media del quadrato);
2.  $R_{XX}(\tau) = R_{XX}(-\tau)$  (simmetria);
3.  $R_{XX}(\tau) \leq R_{XX}(0)$  (massimo nell'origine).

Dimostriamo ad esempio la 3.:

$$\begin{aligned} 0 \leq E [(X(t) - X(t + \tau))^2] &= E [X^2(t)] - 2E [X(t)X(t + \tau)] + E [X^2(t + \tau)] \\ &= 2(R_{XX}(0) - R_{XX}(\tau)). \end{aligned}$$

### Esempio 9.2.2.

In questo esempio viene mostrato come sia possibile effettuare una stima di *ritardo temporale* in presenza di stazionarietà.

Consideriamo un processo  $X(t)$  stazionario generato in un punto dello spazio e ricevuto da due distinti sensori 1 e 2, posti in diverse posizioni note. Il segnale ricevuto dal sensore  $i$  è degradato da rumore additivo  $N_i$  ( $i = 1, 2$ ) a media 0, inoltre  $X(t)$ ,  $N_1(t)$  e  $N_2(t)$  sono scorrelati tra loro. Si vuol stimare il ritardo relativo  $D$  con cui il segnale giunge ai due sensori (cosa che permette ad esempio di determinare la direzione di provenienza del segnale).

Il sistema può essere modellato come segue:

- Il sensore 1 riceve il segnale  $Y_1(t) = aX(t) + N_1(t)$ ,
- Il sensore 2 riceve il segnale  $Y_2(t) = bX(t - D) + N_2(t - D)$ ,

dove  $a$  e  $b$  sono costanti opportune. L'obiettivo di stimare  $D$  può essere perseguito a partire da  $Y_1(t)$  e  $Y_2(t)$  o, più specificatamente, dalla funzione di cross-correlazione  $R_{Y_1Y_2}(\tau)$ :

$$\begin{aligned} R_{Y_1Y_2}(\tau) &= E [Y_1(t)Y_2(t + \tau)] \\ &= E [(aX(t) + N_1(t))(bX(t - D + \tau) + N_2(t - D + \tau))] \\ &= abE [X(t)X(t - D + \tau)] + aE [X(t)N_2(t - D + \tau)] + bE [N_1(t)X(t - D + \tau)] \\ &\quad + E [N_1(t)N_2(t - D + \tau)] \\ &= abR_{XX}(\tau - D). \end{aligned}$$

Poiché la funzione di autocorrelazione  $R_{XX}(\tau)$  ha un massimo nell'origine, si può concludere:

$$D = \arg \max_{\tau} R_{Y_1Y_2}(\tau).$$

## 9.3 Medie Temporalì ed Ergodicità

Dato un processo aleatorio  $X(t, r)$ , per ogni sua realizzazione  $r$  si può definire la sua *media temporale*, che denoteremo con  $\mathcal{M}_x(r)$ :

$$\mathcal{M}_x(r) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t, r) dt.$$

Si osservi che la media temporale è una variabile aleatoria.

In modo del tutto analogo si definisce la funzione di autocorrelazione temporale:

$$\mathcal{R}_{xx}(t, t + \tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t, r) X(t + \tau, r) dt.$$

Supponiamo da ora in poi che il processo  $X(t)$  sia stazionario. Si osservi che la media temporale  $\mathcal{M}_x$    una variabile aleatoria, cos  come la funzione di autocorrelazione temporale  $\mathcal{R}_{xx}(\tau)$ , una volta fissato  $\tau$ . Possiamo calcolare allora la media di tali variabili aleatorie e, nell'ipotesi di stazionariet , si verifica facilmente che:

$$\begin{aligned} E[\mathcal{M}_x] &= M_X, \\ E[\mathcal{R}_{xx}(\tau)] &= R_{XX}(\tau). \end{aligned}$$

Per molti processi accade inoltre che sia la varianza della media temporale che quella della funzione di autocorrelazione temporale sono 0:

$$E[(\mathcal{M}_x - M_X)^2] = 0; \quad E[(\mathcal{R}_{xx}(\tau) - R_{XX}(\tau))^2] = 0, \quad \text{per ogni } \tau.$$

In tal caso   possibile concludere che, per quasi tutte le realizzazioni, la media temporale  $\mathcal{M}_x$  coincide con la media di fase  $M_X$  e la funzione di autocorrelazione temporale  $\mathcal{R}_{xx}(\tau)$  coincide con la funzione di autocorrelazione  $R_{XX}(\tau)$ , per ogni  $\tau$ :

$$\mathcal{M}_x \approx M_X, \quad \mathcal{R}_{xx}(\tau) \approx R_{XX}(\tau), \quad \text{per ogni } \tau.$$

Chiameremo *ergodici* (in senso lato) tali processi.

**Definizione 9.4.** *Un processo stazionario  $X(t)$    detto ergodico se per quasi tutte le realizzazioni (salvo cio  un insieme di realizzazioni che ha per  probabilit  nulla):*

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_x &= M_X, \\ \mathcal{R}_{xx}(\tau) &= R_{XX}(\tau). \end{aligned}$$

Analogamente due processi  $X(t)$  e  $Y(t)$  sono detti congiuntamente ergodici se

$$R_{XY}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t, r) Y(t + \tau, r) dt.$$

per quasi tutte le realizzazioni  $r$ .

Il fatto che un sistema sia ergodico ci permette allora di stimare la media e la funzione di autocorrelazione attraverso la media e la funzione di autocorrelazione temporale, che possono essere stimate sulla base di una singola realizzazione del processo; questo   di grande importanza pratica, poich  spesso nei sistemi reali si pu  accedere solo ai dati relativi a una singola realizzazione.

Per quanto riguarda le applicazioni, occorre dire che i concetti prima introdotti (stazionariet  ed ergodicit ) risultano spesso utili anche in presenza di processi non stazionari (esempio: segnali del parlato o rumore impulsivo). Molti processi infatti risultano *quasi stazionari*, nel senso che possono essere considerati stazionari nel medio periodo; altri processi possono essere decomposti in processi che, per un certo intervallo di tempo, sono approssimativamente stazionari. Se inoltre l'ampiezza di questo intervallo   tale che le medie temporali delle varie realizzazioni sono concentrate, allora possiamo estrarre le informazioni di interesse dalla conoscenza di una singola realizzazione.

**Esempio 9.3.1.**

Riprendendo l'esempio 9.2.2 sulla stima di ritardo temporale, supponiamo che i processi  $X(t)$ ,  $N_1(t)$  e  $N_2(t)$  siano scorrelati tra loro, a tempo discreto, stazionari ed ergodici. Supponiamo inoltre che siano osservate dall'esperimento la realizzazione  $x(t, r) = (x(0), \dots, x(N-1))$  ai tempi  $t_1 < t_2 < \dots < t_N$  e le realizzazioni rilevate dai due sensori,  $y_1(t, r) = (y_1(0), \dots, y_1(N-1))$  e  $y_2(t, r) = (y_2(0), \dots, y_2(N-1))$ , ai medesimi tempi.

Una stima  $d$  del ritardo temporale  $D$  può essere ottenuta dal seguente algoritmo che tratteggiamo:

1. Calcola la stima  $\mathcal{R}_{y_1 y_2}(n)$  della funzione di cross-correlazione  $R_{Y_1 Y_2}(n)$ :

$$\mathcal{R}_{y_1 y_2}(n) = \frac{1}{N-n} \sum_{k=0}^{N-n-1} y_1(k) y_2(k+n), \quad n = 0, \dots, N-1.$$

2. Calcola il ritardo massimizzando la suddetta stima  $\mathcal{R}_{y_1 y_2}(n)$ :

$$d = \arg \max_n \mathcal{R}_{y_1 y_2}(n).$$

**Esempio 9.3.2.**

Stima della funzione di autocorrelazione e di cross-correlazione.

In caso di processi ergodici  $X(t)$  e  $Y(t)$ , i due seguenti sistemi possono essere usati per ottenere una stima approssimata della funzione di autocorrelazione  $R_{XX}$  e di cross-correlazione  $R_{XY}$ , sulla base di due realizzazioni  $x(t)$  e  $y(t)$ :

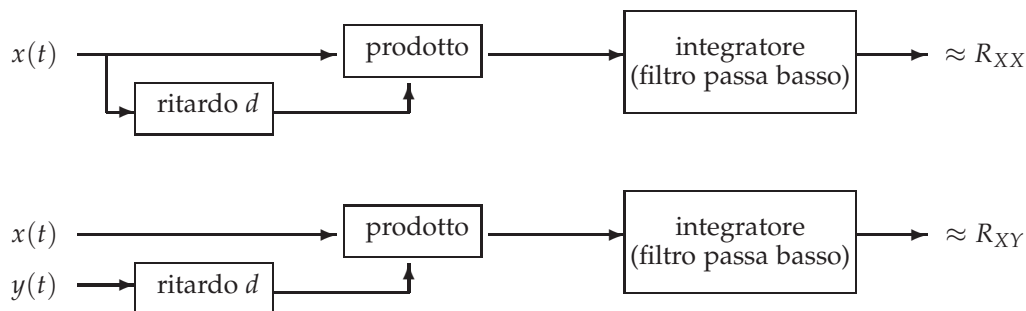


Figura 9.6 Stima dell'autocorrelazione e della cross-correlazione.

## 9.4 Caratteristiche Spettrali dei Processi Stocastici

Concentriamo qui la nostra attenzione all'analisi in frequenza dei processi stocastici stazionari. Dato un processo stazionario  $X(t)$ , come visto in precedenza, un importante parametro è la funzione di autocorrelazione  $R_{XX}(t)$ : se si vuole analizzare in frequenza la funzione di autocorrelazione è naturale introdurre la nozione di *spettro di potenza*:

**Definizione 9.5.** Lo spettro di potenza  $S_{XX}(\omega)$  di un processo  $X(t)$  è la trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione  $R_{XX}(t)$ . Lo spettro di potenza e la funzione di autocorrelazione verificano dunque la relazione trasformata-antitrasformata:

$$S_{XX}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(t)e^{-i\omega t} dt, \quad R_{XX}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(\omega)e^{i\omega t} d\omega.$$

Il termine spettro di potenza deriva dal fatto che, indicando con  $P_X$  la potenza (= energia per unità di tempo) spesa dal processo  $X(t)$ , mediata su tutte le possibili realizzazioni,  $S_{XX}(\omega)d\omega$  risulta essere il contributo delle componenti di frequenza compresa tra  $\omega$  e  $\omega + d\omega$  alla potenza complessiva  $P_X$ .

Il resto di questa sezione è dedicato alla giustificazione della precedente osservazione e può essere saltato in prima lettura.

Per un segnale deterministico  $f(t)$  l'energia spesa nell'intervallo di tempo tra  $t$  e  $t + dt$  è  $f^2(t)dt$ , e quindi l'energia  $E_T$  e la potenza media  $P_T$ , relative all'intervallo di tempo  $[-T, T]$ , risultano rispettivamente:

$$E_T = \int_{-T}^T f^2(t)dt, \quad P_T = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f^2(t) dt.$$

Fissato ora un processo stocastico stazionario  $X(t)$  e un tempo  $T$ , consideriamo il processo  $X_T(t)$  coincidente con  $X(t)$  nell'intervallo  $[-T, T]$  e nullo fuori da tale intervallo. Nell'intervallo  $[-T, T]$ , la potenza di una realizzazione  $r$  del processo risulta allora:

$$P_T(r) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X_T^2(t, r) dt.$$

$P_T(r)$  è una variabile aleatoria, la cui aspettazione  $\mathcal{P}_T = E[P_T(r)]$  può essere interpretata come potenza media relativa all'intervallo di tempo  $[-T, T]$ . La *potenza media*  $\mathcal{P}_X$  del processo  $X(t)$  può allora essere definita come limite di  $P_T$  per  $T$  tendente a  $+\infty$ :

$$\mathcal{P}_X = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E[X_T^2(t, r)] dt.$$

Per processi stazionari per cui  $E[X^2(t)] < \infty$ , ricordiamo che  $E[X^2(t)] = R_{XX}(0)$ , dove  $R_{XX}$  è la funzione di autocorrelazione; poiché per grandi valori di  $T$  vale che  $E[X_T^2(t)] \approx E[X^2(t)] = R_{XX}(0)$ , si può concludere che la potenza  $\mathcal{P}_X$  media è  $R_{XX}(0)$ .

Tornando ora al processo "troncato"  $X_T(t, r)$ , la sua trasformata di Fourier  $F_T(\omega, r)$  può essere vista come un nuovo processo stocastico (sui complessi); considerando la relazione trasformata-antitrasformata, si ha:

$$F_T(\omega, r) = \int_{-\infty}^{+\infty} X_T(t, r)e^{-i\omega t} dt, \\ X_T(t, r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_T(\omega, r)e^{i\omega t} d\omega.$$

A causa del teorema di Parseval vale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X_T^2(t, r) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F_T(\omega, r)|^2 d\omega.$$

Questo fatto permette di ottenere un'espressione alternativa per la potenza media  $\mathcal{P}_X$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_X &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E [X_T^2(t, r)] dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E \left[ \int_{-T}^T X_T^2(t, r) dt \right] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F_T(\omega, r)|^2 d\omega \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E [|F_T(\omega, r)|^2] d\omega.\end{aligned}$$

Se denotiamo con  $S_{XX}(\omega)$  il termine contenuto nel precedente integrale, cioè:

$$S_{XX}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E [|F_T(\omega, r)|^2]$$

possiamo concludere che:

$$\mathcal{P}_X = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T S_{XX}(\omega) d\omega.$$

Dalla formula precedente, si vede che  $S_{XX}(\omega)d\omega$  è il contributo alla potenza complessiva  $\mathcal{P}_X$  delle componenti armoniche di frequenza compresa tra  $\omega$  e  $\omega + d\omega$ : per questo motivo la funzione  $S_{XX}(\omega)$  è detta *densità di potenza* o *spettro di potenza* del processo  $X(t)$ .

Mostriamo ora che questa definizione di spettro di potenza è consistente con quella data da noi precedentemente, e cioè di trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione:

**Fatto 9.1.** Lo spettro di potenza  $S_{XX}(\omega)$  è la trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione  $R_{XX}(t)$ .

*Dimostrazione.* Indicando con  $\bar{F}$  il coniugato di  $F$ , per definizione si ha:

$$\begin{aligned}|F_T(r, \omega)|^2 &= F_T(r, \omega) \bar{F}_T(r, \omega) \\ &= \int_{-T}^T X_T(r, p) e^{-i\omega p} dp \int_{-T}^T X_T(r, q) e^{i\omega q} dq \\ &= \int_{-T}^T \int_{-T}^T X_T(r, p) X_T(r, q) e^{-i\omega(p-q)} dp dq.\end{aligned}$$

Si opera il cambio di variabili  $t = p - q$ ,  $a = q$ ; controllando con accuratezza le regioni di integrazione si ottiene:

$$\begin{aligned}E [|F_T(r, \omega)|^2] &= E \left[ \int_{-T}^T \int_{-T}^T X_T(r, p) X_T(r, q) e^{-i\omega(p-q)} dp dq \right] \\ &= \int_{-T}^T \int_{-T}^T E [X_T(r, p) X_T(r, q)] e^{-i\omega(p-q)} dp dq \\ &= \int_{-2T}^0 R_{XX}(t) e^{-i\omega t} \left( \int_{-T+t}^T da \right) dt + \int_0^{2T} R_{XX}(t) e^{-i\omega t} \left( \int_{-T}^{T-t} da \right) dt \\ &= 2T \int_{-2T}^{2T} R_{XX}(t) e^{-i\omega t} dt - \int_{-2T}^{2T} t R_{XX}(t) e^{-i\omega t} dt.\end{aligned}$$

Sotto l'assunzione largamente verificata nelle applicazioni che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t R_{XX}(t) dt < +\infty,$$

si arriva a concludere:

$$S_{XX}(\omega) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} E [ |F_T(r, \omega)|^2 ] = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(t) e^{-i\omega t} dt.$$

□

Alcune proprietà dello spettro di potenza sono riportate di seguito (senza dimostrazione):

1.  $S_{XX}(\omega) \geq 0$  (funzione non negativa);
2.  $S_{XX}(-\omega) = S_{XX}(\omega)$  (simmetria);
3.  $S_{XX} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (funzione reale);
4.  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(\omega) d\omega = E [ X^2(t) ]$  (potenza media).

Analogamente allo spettro di potenza per un singolo processo si definisce *spettro di potenza incrociato* tra due processi  $X(t)$  e  $Y(t)$  come la trasformata di Fourier della funzione di cross-correlazione, come mostra la seguente coppia trasformata-antitrasformata:

$$S_{XY}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XY}(t) e^{-i\omega t} dt, \quad R_{XY}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XY}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Naturalmente, questo risultato è valido sotto l'ipotesi di processi congiuntamente stazionari in senso lato.

A differenza del caso di singolo processo, lo spettro di potenza di processi congiunti possiede le proprietà riportate di seguito (anc'esse senza dimostrazione):

1.  $S_{XY}(\omega) = S_{YX}(-\omega) = \overline{S_{YX}(\omega)}$  (prop. del coniugato);
2.  $\text{Re} \{ S_{XY} \}$  è una funzione pari;
3.  $\text{Im} \{ S_{XY} \}$  è una funzione dispari;
4.  $S_{XY}(\omega) = 2\pi M_X M_Y$  (processi scorrelati).

È bene ricordare che, siccome la funzione di cross-correlazione  $R_{XY}(t)$  non è necessariamente simmetrica, lo spettro di potenza incrociato non è sempre una funzione reale, e le proprietà 2 e 3 derivano da questo fatto.

#### Esempio 9.4.1.

Calcolare lo spettro di potenza di un processo avente funzione di autocorrelazione

$$R_{XX}(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos \omega_0 \tau.$$

La sua trasformata di Fourier risulta:

$$\begin{aligned} S_{XX}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(\tau) e^{-i\omega \tau} d\tau \\ &= \frac{A^2}{4} \left[ e^{-i(\omega - \omega_0)} + e^{-i(\omega + \omega_0)} \right] \\ &= \frac{A^2 \pi}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]. \end{aligned}$$

**Esempio 9.4.2.**

Si calcoli la funzione di autocorrelazione del processo con spettro di potenza dato da:

$$S_{XX}(\omega) = \text{sinc}^2\left(\frac{\omega}{T}\right).$$

Dalle tabelle recanti le coppie trasformata-antitrasformata di Fourier sappiamo che

$$\text{rect}\left(\frac{\tau}{T}\right) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} T \text{sinc}(\omega T/2).$$

Visto che la funzione  $S_{XX}$  è il prodotto di due funzioni sinc, applicando la proprietà prodotto nelle frequenze convoluzione nel tempo si ottiene:

$$\mathcal{R}_{xx}(\tau) = T(1 - |T\tau|) \text{rect}\left(\frac{T\tau}{2}\right).$$