

TRASFORMATA ZETA E SISTEMI LTI A TEMPO DISCRETO

Questo capitolo è dedicato allo studio della trasformata zeta, strumento di analisi dei sistemi LTI a tempo discreto così come la trasformata di Fourier (o meglio quella di Laplace) lo è per quelli a tempo continuo. Storicamente, i fondamenti di questa nozione sono introdotti nei lavori sul calcolo delle probabilità di De Moivre, nella prima metà del 1700; essa ha trovato inoltre feconde applicazioni nel campo della matematica combinatoria, in cui la trasformata zeta è detta “funzione generatrice”.

Essenzialmente, l’idea base è quella di associare iniettivamente ad ogni sequenza $x(n)$ ($-\infty < n < +\infty$) una funzione $X(z)$ a variabile complessa, detta trasformata zeta della sequenza $x(n)$. Nella prima parte di questo capitolo si discute la base matematica della trasformata zeta. Poiché in gran parte delle applicazioni si considerano segnali a tempo discreto la cui trasformata zeta è una funzione razionale, in prima lettura i primi due paragrafi, dedicati ad approfondimenti matematici generali, possono essere saltati.

Poiché l’introduzione della trasformata richiede alcune nozioni di analisi complessa, che è bene chiarire dall’inizio, nel primo paragrafo vengono richiamati alcuni elementi di analisi utili alla comprensione del resto: serie di potenze, derivata di funzione a variabile complessa, funzioni analitiche e integrali di linea. Nel secondo paragrafo è introdotta la nozione di trasformata zeta e studiato il problema dell’inversa, detta antitrasformata zeta.

In analogia a quanto già visto per la trasformata di Fourier, vengono introdotte nel

terzo paragrafo alcune proprietà della trasformata zeta che risultano utili regole di manipolazione simbolica. Viene analizzato in dettaglio l'importante caso in cui la trasformata zeta risulta essere una funzione razionale.

L'ultima parte del capitolo presenta applicazioni dei concetti introdotti all'analisi di sistemi lineari a tempo discreto. Per prima cosa si osserva che, dato un sistema LTI con risposta all'impulso $h(n)$, se $X(z)$, $Y(z)$ e $H(z)$ sono le trasformate zeta rispettivamente dell'ingresso, dell'uscita e della risposta all'impulso, risulta (si noti l'analogia con i sistemi LTI a tempo continuo):

$$Y(z) = H(z)X(z).$$

La trasformata zeta della risposta all'impulso viene anche detta *funzione di trasferimento* del sistema. Sistemi LTI causali e stabili sono caratterizzati mediante semplici proprietà della funzione di trasferimento: i poli di questa funzione devono essere contenuti nel cerchio di raggio unitario.

Il capitolo termina con lo studio della risposta in frequenza di sistemi LTI a tempo discreto: essa è data dalla trasformata di Fourier a tempo discreto della risposta all'impulso ed è derivabile in modo naturale dalla funzione di trasferimento. Mostriamo infine come dai poli e dagli zeri della funzioni di trasferimento si possano ottenere agevolmente informazioni qualitative sul guadagno e sulla fase del filtro.

7.1 Richiami di Analisi Complessa

Nel Paragrafo 2.1 abbiamo introdotto la struttura algebrica del campo dei numeri complessi \mathbb{C} , geometricamente descritti da punti di un piano; sottoinsiemi di numeri complessi possono quindi essere rappresentati da opportune figure geometriche.

Esempio 7.1.1.

L'insieme dei numeri complessi $B_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ è il cerchio o disco aperto di centro z_0 e raggio r .

La regione compresa tra due circonferenze di raggio r_1 e r_2 viene chiamata invece corona circolare: $C(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$

Per semplicità considereremo solo domini aperti, insiemi cioè per i quali se un punto z_0 vi appartiene, allora esiste un disco $B_\delta(z_0)$ interamente contenuto nell'insieme.

Consideriamo ora le funzioni a variabile complessa $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ definite su un aperto \mathcal{A} del piano complesso e introduciamo la seguente nozione di limite:

diremo che $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che, se $|z - z_0| < \delta$ allora $|f(z) - l| < \varepsilon$.

Attraverso la nozione di limite possiamo definire (quando esiste) la derivata $f'(z)$ della funzione $f(z)$ data come limite del rapporto incrementale:

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

Dato un sottoinsieme aperto \mathcal{A} , una funzione $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ è detta *analitica* su \mathcal{A} se per ogni punto $z \in \mathcal{A}$ esiste la derivata $f'(z)$.

Esempio 7.1.2.

Un *polinomio* di grado N è una funzione del tipo $P(z) = \sum_{k=0}^N c_k z^k$, con $c_N \neq 0$. Poiché $P'(z) = \sum_{k=0}^{N-1} (k+1)c_{k+1}z^k$, il polinomio $P(z)$ risulta essere dunque una funzione analitica su tutto il piano complesso. Richiamando il teorema fondamentale dell'algebra, dato un polinomio $P(z)$ di grado N , l'equazione $p(z) = 0$ ammette N radici z_1, \dots, z_N , eventualmente ripetute, tali che:

$$P(z) = c_N(z - z_1)^{m_1} \cdots (z - z_N)^{m_N}.$$

Tali radici vengono anche dette *zeri* del polinomio e il numero di ripetizioni m_i di z_i è detto molteplicità della radice z_i . Per ogni radice z_k vale inoltre:

$$P(z_k) = P'(z_k) = \cdots = P^{(m_k-1)}(z_k) = 0 \quad \text{e} \quad P^{(m_k)}(z_k) \neq 0.$$

Esempio 7.1.3.

Una funzione *razionale* è una funzione $R(z) = P(z)/Q(z)$ ottenuta dal rapporto di due polinomi $P(z)$ e $Q(z)$; poiché

$$R'(z) = \frac{P'(z)Q(z) - Q'(z)P(z)}{Q^2(z)},$$

tale funzione è analitica su tutto il piano complesso ad eccezione degli zeri del denominatore, cioè i punti per i quali $Q(z) = 0$. Gli zeri del numeratore sono detti *zeri* della funzione razionale, mentre gli zeri del denominatore sono detti *poli* della funzione razionale. È importante rilevare che una funzione razionale è, a meno di una costante moltiplicativa, individuata dai suoi zeri e dai suoi poli.

Esempio 7.1.4.

Una *serie di potenze* è un'espressione del tipo

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k,$$

dove z_0 è il centro della serie e gli a_k i coefficienti.

Ad ogni serie di potenze è associato univocamente un numero non negativo $r \in [0, +\infty)$ detto *raggio di convergenza* della serie. Esso individua il disco aperto $B_r(z_0)$ di centro z_0 e raggio r caratterizzato dalle proprietà:

1. la serie converge assolutamente (cioè $\sum_{k=0}^{+\infty} |c_k||z|^k < +\infty$) per tutti i valori z all'interno del disco $B_r(z_0)$: in questo insieme la sua somma definisce una funzione a variabile complessa $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} |c_k||z|^k$;
2. La serie non converge (cioè $\sum_{k=0}^{+\infty} |c_k||z|^k = +\infty$) per i valori di z al di fuori del disco chiuso, cioè $|z - z_0| > r$;
3. il comportamento sul bordo (circonferenza di raggio r centrata in z_0) non può essere specificato dalla sola conoscenza del raggio.

Poiché $f'(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)a_{k+1}z^k$, la funzione $f(z)$ è analitica nel cerchio aperto di raggio r .

Richiamiamo ora il concetto di integrazione secondo Cauchy di una funzione complessa lungo una curva Γ .

Supponiamo che $t \mapsto z(t)$ sia una funzione derivabile con continuità nell'intervallo $[a, b]$ e che Γ sia una curva semplice contenuta in \mathcal{A} . Sia $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione continua a tratti su Γ . Si chiama integrale di f esteso a Γ il numero complesso

$$I = \int_{\Gamma} f(z) dz = \int_a^b f(z(t))z'(t) dt.$$

Il modo più chiaro ed espressivo per definire l'integrale è quello delle somme di Cauchy. Consideriamo a tal proposito un cammino regolare (curva continua) chiuso (o circuito) \mathcal{C} nel piano complesso parametrizzata dall'applicazione

$$t \in [a, b] \mapsto z(t) \in \mathbb{C}, \quad \text{iniettivo in } (a, b), \quad \text{con } z(a) = z(b).$$

Sia data un'arbitraria partizione di $[a, b]$ in N punti $a = t_1 < t_2 < \dots < t_N = b$ corrispondente a un'analogha partizione del cammino \mathcal{C} z_1, \dots, z_N con $z_i = z(t_i)$, contenuto in un aperto \mathcal{A} e presi percorrendolo in senso antiorario come in Figura 7.1.

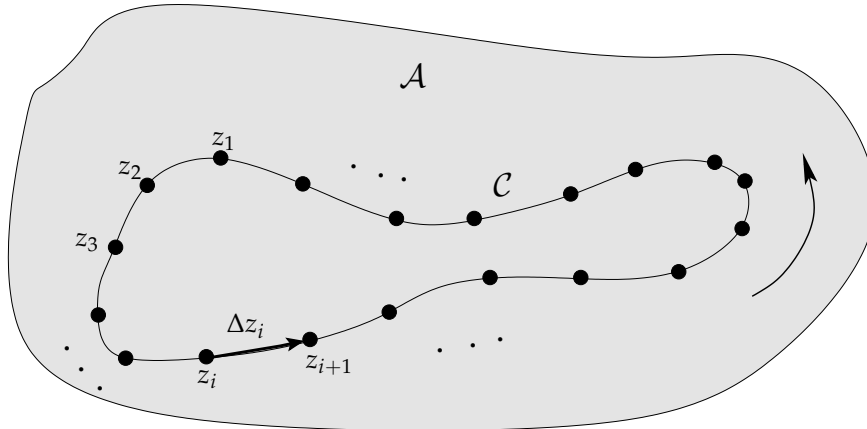


Figura 7.1 Cammino regolare con \mathcal{C} chiuso definito su un aperto \mathcal{A} del piano complesso.

Per una data una funzione $f(z)$ definita su un aperto \mathcal{A} contenente il cammino \mathcal{C} , risulta ben definita l'espressione (somma di Cauchy):

$$\sum_{k=0}^{N-1} f(z_k) \Delta z_k,$$

dove $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k$ e $z_0 = z_N$. Si definisce *integrale di linea complesso* (se esiste) il seguente limite:

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = \lim_{\max_k |\Delta z_k| \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{N-1} f(z_k) \Delta z_k.$$

L'integrale così definito dipende solo dal circuito e dal suo orientamento e non dalla partizione scelta; se cambia l'orientamento cambia il segno dell'integrale.

Un risultato centrale nella teoria dell'integrazione complessa è il teorema di Cauchy:

sia C un circuito semplice contenuto in un aperto A e $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ sia analitica su tutto il dominio, allora

$$\oint_C f(z) dz = 0.$$

Esempio 7.1.5.

Un corollario del teorema di Cauchy, che utilizzeremo di seguito, è il seguente:

$$\oint_C z^{k-1} dz = \begin{cases} 2\pi i, & \text{se } k = 0 \\ 0, & \text{se } k \neq 0 \end{cases} \quad (7.1)$$

dove C è un cammino chiuso che circonda l'origine.

Verifichiamolo nel caso in cui il cammino sia la circonferenza di raggio $r > 0$ centrata nell'origine. Passando alla forma esponenziale per la variabile z , si ha:

$$z = re^{i\theta} \quad \text{da cui} \quad dz = ire^{i\theta} d\theta.$$

Possiamo allora concludere che:

$$\oint_C z^{k-1} dz = \int_0^{2\pi} r^{k-1} e^{i(k-1)\theta} (ir) e^{i\theta} d\theta = ir^k \int_0^{2\pi} e^{ik\theta} d\theta = \begin{cases} i\theta \Big|_0^{2\pi} = 2\pi i, & \text{se } k = 0 \\ r^k \frac{e^{ik\theta}}{k} \Big|_0^{2\pi} = 0, & \text{se } k \neq 0 \end{cases}.$$

Esempio 7.1.6.

Sia $R(z) = P(z)/Q(z)$ una funzione razionale; essa può essere espressa come somma di frazioni parziali (vedi Esempio 2.6.2) così che:

$$R(z) = \sum_{k=1}^M \frac{A_k}{z - z_k}.$$

Questo è vero quando ogni polo ha molteplicità 1 e il grado del numeratore è minore del grado M del denominatore (l'estensione al caso generale non presenta particolari difficoltà). Vale allora che:

$$\oint_C R(z) dz = \sum_{k=1}^M A_k \oint_C (z - z_k)^{-1} dz.$$

Osserviamo ora che, ponendo $z - z_k = re^{i\theta}$ e procedendo come nell'esempio precedente, risulta:

$$\oint_C (z - z_k)^{-1} dz = \begin{cases} 2\pi i, & \text{se } z_k \text{ è interno alla regione delimitata da } L \\ 0, & \text{se } z_k \text{ è esterno alla regione delimitata da } L \end{cases}.$$

Possiamo allora concludere che:

$$\oint_C R(z) dz = \sum_{z_k \in \hat{C}} 2\pi i a_k.$$

Esempio 7.1.7.

Sia $s(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k$ la funzione analitica definita da una serie di potenze con raggio di convergenza R e sia L un cammino chiuso contenuto nel cerchio di convergenza. Allora:

$$\oint_L s(z) dz = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k \oint_L z^k dz = 0,$$

poiché $\oint_L z^k dz = 0$ se $k \geq 0$.

7.2 Trasformata e Antitrasformata Zeta

Introduciamo in questo paragrafo il concetto di trasformata z . Essa è una trasformazione che associa ad ogni segnale $x(n)$ un'opportuna funzione a variabile complessa $X(z)$, definita su una corona circolare. La trasformata zeta è uno strumento di base per l'analisi in frequenza dei sistemi LTI a tempo discreto.

Definizione 7.1. La trasformata z di una sequenza $x(n)$ ($-\infty < n < \infty$) a valori reali o complessi è la funzione a variabile complessa $X(z)$ definita da:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n}. \quad (7.2)$$

È talvolta conveniente denotare la trasformata z della sequenza $x(n)$ con la scrittura $\mathcal{Z}\{x(n)\}$.

La serie $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n}$ è chiamata serie di Laurent e nella regione del piano complesso in cui converge definisce la funzione a variabile complessa $X(z)$. Al fine di individuare la regione di convergenza, osserviamo che $X(z) = X^-(z) + X^+(z)$, dove

$$X^-(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n) z^{-n} \quad \text{e} \quad X^+(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n) z^{-n},$$

$X^-(z)$ è una serie di potenze nella variabile z ; se chiamiamo R^- il suo raggio di convergenza, la funzione $X^-(z)$ è definita per $|z| < R^-$. $X^+(z)$ è una serie di potenze nella variabile z^{-1} ; se denotiamo con R^+ il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} x(n) z^n$, la funzione $X^+(z)$ è definita per $|z^{-1}| < R^+$ e quindi per $|z| > \frac{1}{R^+}$.

Se $\frac{1}{R^+} < R^-$, le funzioni $X^-(z)$ e $X^+(z)$ (e quindi la funzione $X(z)$), sono contemporaneamente definite nella corona circolare (mostrata in Figura 7.2) data da:

$$\frac{1}{R^+} < |z| < R^-.$$

Esempio 7.2.1.

Si consideri il segnale $x(n) = a^n u(n)$, dove $u(n)$ è:

$$u(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \geq 0 \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

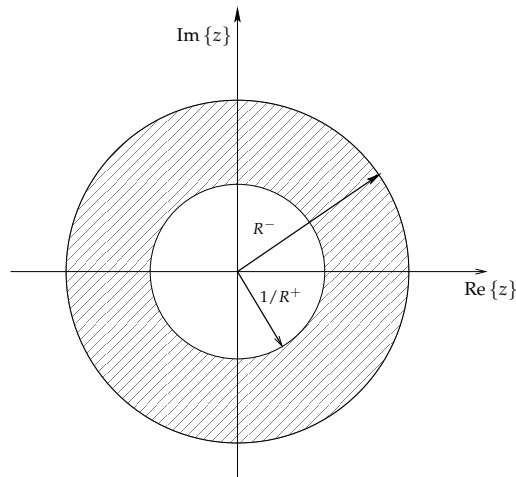


Figura 7.2 Regione di convergenza della trasformata z bilaterale.

Si osservi che $u(n)$ è l'analogo discreto del segnale gradino unitario introdotto nell'Esempio 1.3.18.

Dalla (7.2) si ricava:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$

In questo caso $X^-(z) = 0$ è definita su tutto il piano complesso, mentre $X^+(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n u(n) z^{-n}$ è definita per $|z| > |a|$. Quindi $X(z)$ è definita per $|z| > |a|$ come mostrato in Figura 7.3. Si osservi che $X(z)$ è una funzione razionale, che ha un solo

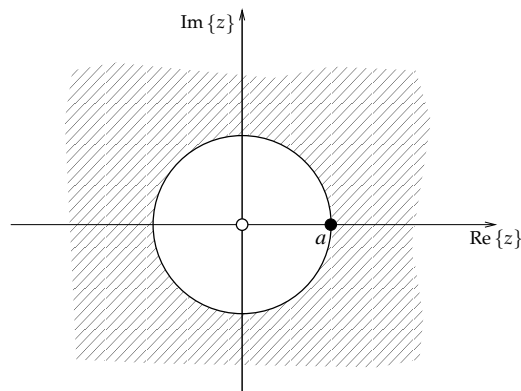


Figura 7.3 Poli, zeri e regione di convergenza della trasformata z di $x(n) = a^n u(n)$.

zero in $z = 0$ e un solo polo in $z = a$, rappresentati in figura rispettivamente da un cerchietto e un pallino.

Esempio 7.2.2.

Si consideri ora il segnale $x(n) = -a^n u(-n-1)$. In questo caso si ha che:

$$F(z) = - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u(-n-1) z^{-n} = - \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} (a^{-1}z)^n = \frac{z}{z-a},$$

che è definita per $|z| < |a|$, visto che in questo caso la funzione $X^+(z) = 0$ è definita su tutto il piano complesso, mentre la funzione $X^-(z) = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n u(-n-1) z^{-n}$ è definita per $|z| < |a|$, come mostrato in Figura 7.4. Anche in questo esempio $X(z)$ ha

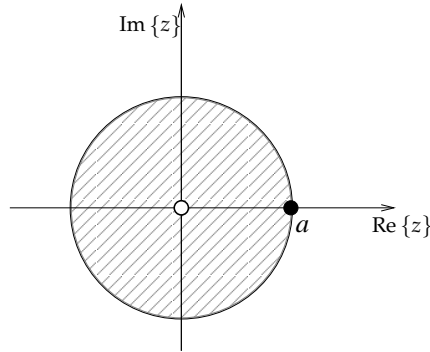


Figura 7.4 Poli, zeri e regione di convergenza della trasformata z di $x(n) = -a^n u(-n-1)$.

solo zero in $z = 0$ e un solo polo in $z = a$.

Nei due esempi precedenti si sono ottenute le seguenti coppie trasformata–antitrasformata:

$$\begin{aligned} a^n u(n) &\xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{z}{z-a}, & |z| > |a| \\ -a^n u(-n-1) &\xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{z}{z-a}, & |z| < |a|. \end{aligned}$$

Si noti che le trasformate delle due sequenze sono uguali come forma analitica, mentre le regioni di convergenza sono divise. Questi esempi suggeriscono pertanto l'idea che la trasformata z è completamente specificata da una funzione nella variabile z e dal suo dominio di definizione, che è dato dalla corona di convergenza. Entrambe queste caratteristiche sono essenziali per determinare univocamente, come vedremo di seguito, la trasformata inversa o antitrasformata z di una funzione $X(z)$. Tale problema può essere posto come segue:

data una funzione $X(z)$ definita su una opportuna corona circolare C , determinare la sequenza $x(n)$ di cui $X(z)$ è la trasformata zeta.

Consideriamo a questo riguardo l'espressione

$$\oint_L X(z) z^{n-1} dz$$

e integriamo lungo un cammino chiuso L che includa l'origine e interamente contenuto

nella corona di convergenza di $X(z)$. Si ottiene quindi:

$$\begin{aligned}\oint_L X(z)z^{n-1}dz &= \oint_L \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)z^{n-k-1}dz \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \oint_L z^{n-k-1}dz \\ &= 2\pi i x(n) \quad (\text{per la (7.1)}).\end{aligned}$$

Questo risultato mostra che la trasformata \mathcal{Z} è invertibile e la sua inversa, che denoteremo con \mathcal{Z}^{-1} e chiameremo *antitrasformata zeta*, è data da:

$$\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = x(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L X(z)z^{n-1}dz, \quad (7.3)$$

dove L è un cammino chiuso contenuto nella corona circolare di convergenza.

Sebbene la (7.3) fornisca la desiderata formula di inversione, essa richiede la valutazione di un integrale di circuitazione che può introdurre a volte complicazioni tecniche legate alla risoluzione analitica dello stesso. Siccome in questa trattazione ci occuperemo esclusivamente di trasformate sottoforma di funzioni razionali, vedremo nel seguito come sviluppare tecniche di inversione basate esclusivamente su combinazioni di trasformate semplici, per le quali la formula inversa è nota, e sulle proprietà della trasformata stessa.

Riassumendo, la coppia trasformata-antitrasformata zeta è:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n}, \quad x(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L X(z)z^{n-1}dz.$$

Esempio 7.2.3.

Si consideri la trasformata zeta

$$X(z) = \frac{(a-b)z}{(z-a)(z-b)} = \frac{(a-b)z^{-1}}{(1-az^{-1})(1-bz^{-1})}, \quad |z| > a,$$

con a e b reali tali che $0 < b < a$. La funzione $X(z)$ ha due poli, rispettivamente in $z = a$ e $z = b$ e la regione di convergenza è la regione di piano esterna al polo di ampiezza maggiore a .

Al fine di trovare la trasformata inversa, applichiamo il metodo delle frazioni parziali secondo il quale $X(z)$ può essere riscritta come

$$X(z) = \frac{1}{(1-az^{-1})} - \frac{1}{(1-bz^{-1})}.$$

Il problema è quindi ridotto a quello di trovare la trasformata inversa di ognuno delle due frazioni semplici $\frac{1}{(1-az^{-1})}$ e $\frac{1}{(1-bz^{-1})}$. Dagli esempi precedenti sappiamo che:

$$\begin{aligned}a^n u(n) &\xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{1}{1-az^{-1}}, & |z| > a \\ b^n u(n) &\xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{1}{1-bz^{-1}}, & |z| > b,\end{aligned}$$

da cui:

$$x(n) = a^n u(n) - b^n u(n).$$

Esempio 7.2.4.

Si consideri di nuovo la trasformata z , $X(z)$, dell'esempio precedente, ma questa volta con associata la regione di convergenza descritta dalla corona $a < |z| < b$. Dalla decomposizione in frazioni parziali di $X(z)$ ora si ottengono le seguenti coppie trasformata-antitrasformata:

$$\begin{aligned} a^n u(n) &\xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{1}{1 - az^{-1}}, & |z| > a \\ b^n u(n) &\xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{1}{1 - bz^{-1}}, & |z| < b. \end{aligned}$$

Sempre in riferimento agli Esempi 7.2.1 e 7.2.2, antitrasformando si ricava la sequenza:

$$x(n) = a^n u(n) + b^n u(-n - 1).$$

Si supponga infine che ad $X(z)$ sia associata la regione di convergenza interna la cerchio di raggio a , cioè $|z| < a$. In questo caso le coppie trasformata-antitrasformata sono:

$$\begin{aligned} a^n u(n) &\xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{1}{1 - az^{-1}}, & |z| < a \\ b^n u(n) &\xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{1}{1 - bz^{-1}}, & |z| < b, \end{aligned}$$

da cui si ricava:

$$x(n) = -a^n u(-n - 1) + b^n u(-n - 1)$$

7.2.1 Proprietà della Trasformata Zeta

La trasformata zeta di un segnale a tempo discreto $x(n)$ è la funzione $X(z)$ a variabile complessa tale che:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n}.$$

La trasformata zeta $X(z)$ del segnale $x(n)$ ha come dominio di esistenza, che indichiamo con R_X , la *regione di convergenza* (ROC) della serie $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n}$. Ad esempio, indicando con $\delta(n)$ e $u(n)$ rispettivamente l'impulso e il gradino unitari, alcune note trasformate e relativa regione di convergenza sono date in Tabella 7.1.

La trasformata zeta possiede un certo numero di proprietà che la rendono uno strumento flessibile ed efficace per lo studio dei segnali a tempo discreto. Le principali proprietà sono presentate in Tabella 7.2.

La linearità è provata come segue:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (ax(n) + by(n))z^{-n} = a \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} + b \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n)z^{-n} = aX(z) + bY(z).$$

Per quanto riguarda la proprietà di traslazione, si consideri $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n - a)z^{-n}$; ponendo $k = n - a$, quindi $n = a + k$, si ha:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n - a)z^{-n} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)z^{-a-k} = z^{-a} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)z^{-k} = z^{-a} X(z).$$

Tabella 7.1 Alcune coppie note segnale-trasformata z e relativa regione di convergenza (ROC).

Segnale	Trasformata z	ROC
$\delta(n)$	1	$z \in \mathbb{C}$
$\delta(n - m)$	z^{-m}	$z \in \mathbb{C}$ eccetto $\begin{cases} 0 & \text{se } m > 0 \\ +\infty & \text{se } m < 0 \end{cases}$
$a^n u(n)$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z > a $
$-a^n u(-n - 1)$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z < a $
$-na^n u(-n - 1)$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z < a $
$\cos(\omega_0 n) u(n)$	$\frac{1 - z^{-1} \cos \omega_0}{1 - 2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}$	$ z > 1$
$\sin(\omega_0 n) u(n)$	$\frac{z^{-1} \sin \omega_0}{1 - 2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}$	$ z > 1$
$a^n \cos(\omega_0 n) u(n)$	$\frac{1 - az^{-1} \cos \omega_0}{1 - 2az^{-1} \cos \omega_0 + a^2 z^{-2}}$	$ z > a $
$a^n \sin(\omega_0 n) u(n)$	$\frac{az^{-1} \sin \omega_0}{1 - 2az^{-1} \cos \omega_0 + a^2 z^{-2}}$	$ z > a $

Proviamo infine la proprietà di convoluzione:

$$\begin{aligned} X(z)Y(z) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)z^{-k} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} y(j)z^{-j} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} x(k)y(j)z^{-k-j} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z^{-n} \sum_{k+j=n} x(k)y(j) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y(n-k) \right) z^{-n}. \end{aligned}$$

Applicando le proprietà presentate in Tabella 7.2 alle coppie di trasformate elencate in Tabella 7.1 è possibile determinare le trasformate zeta di una vasta classe di segnali, comprendenti tutti quelli di interesse pratico trattati in questo testo.

Esempio 7.2.5.

Determinare le trasformate z dei segnali $2^{-n}u(n) + u(n - 3)$, $n2^{-n}u(n)$, $\cos(3n)u(n)$.

Tabella 7.2 Proprietà della trasformata z e relativa regione di convergenza (ROC).

Proprietà	$x(n)$	\leftrightarrow	$X(z)$	ROC
Linearità	$ax(n) + by(n)$		$aX(z) + bY(z)$	$R_X \cap R_Y$
Traslazione	$x(n - n_0)$		$z^{-n_0}X(z)$	R_X
Scalatura (dominio z)	$a^n x(n)$		$X\left(\frac{z}{a}\right)$	$ a R_X$
Convoluzione	$x(n) * y(n)$		$X(z)Y(z)$	$R_X \cap R_Y$
Differenziazione (dominio z)	$nx(n)$		$-z \frac{d}{dz} X(z)$	R_X

$2^{-n}u(n) + u(n - 3)$	\leftrightarrow	$\frac{1}{1 - (2z)^{-1}}$	da Tabella 7.1
$u(n)$	\leftrightarrow	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	da Tabella 7.1
$u(n - 3)$	\leftrightarrow	$\frac{z^{-3}}{1 - z^{-1}}$	Prop. di traslaz.
$2^{-n}u(n) + u(n - 3)$	\leftrightarrow	$\frac{1}{1 - z^{-1}} + \frac{z^{-3}}{1 - z^{-1}}$	Prop. di linear.
$n2^{-n}u(n)$	\leftrightarrow	$\frac{-(2z)^{-1}}{1 - (2z)^{-2}}$	Prop. di differ.
$e^{i3n}u(n)$	\leftrightarrow	$\frac{1}{1 - e^{3i}z^{-1}}$	da Tabella 7.1
$e^{-i3n}u(n)$	\leftrightarrow	$\frac{1}{1 - e^{-3i}z^{-1}}$	da Tabella 7.1
$\cos(3n)u(n) = \frac{1}{2}(e^{i3n} + e^{-i3n})u(n)$	\leftrightarrow	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 - e^{3i}z^{-1}} + \frac{1}{1 - e^{-3i}z^{-1}}\right)$	Prop. di linear.

Per quanto riguarda il calcolo dell'antitrasformata, che permette la ricostruzione di un segnale a partire dalla sua trasformata zeta, consideriamo qui, per il suo interesse nelle applicazioni ai segnali, il caso in cui la trasformata zeta è una funzione razionale e il dominio di esistenza contiene ∞ .

Data una funzione razionale $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ dove $P(z)$ e $Q(z)$ sono polinomi, per la determinazione del segnale la cui trasformata zeta è $R(z)$ si procede come segue:

1. si pone $s = z^{-1}$ (quindi $z = s^{-1}$), ottenendo una nuova funzione razionale $R(s^{-1}) = \frac{U(s)}{W(s)}$ dove $U(s)$ e $W(s)$ sono due nuovi polinomi;
2. si sviluppa $R(s^{-1})$ in frazioni parziali ottenendo, se gli zeri di sono semplici, $R(s^{-1}) = \sum_k \frac{A_k}{s - b_k}$ o equivalentemente $R(z) = \sum_k \frac{-A_k}{b_k} \frac{1}{1 - \frac{1}{b_k}z^{-1}}$.
3. da Tabella 7.1 e per la linearità, si ha:

$$R(z) \longleftrightarrow -\sum_k \frac{A_k}{b_k} \frac{1}{b_k^n} u(n).$$

Esempio 7.2.6.

Determinare il segnale la cui trasformata è $R(z) = \frac{z^2}{1-3z+2z^2}$ e la cui regione di convergenza contiene ∞ .

Posto $s = z^{-1}$ si ha $R(s^{-1}) = \frac{1}{s^2-3s+2} = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s-1}$, sviluppando in frazioni parziali.

Questo significa: $R(z) = -\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$.

Per la linearità e da Tabella 7.1 si conclude:

$$R(z) \longleftrightarrow u(n) - \frac{1}{2^{n+1}}u(n).$$

Gli esempi precedenti illustrano la procedura base per determinare la trasformata z inversa di una funzione razionale data la corona di convergenza. In generale, consideriamo una funzione razionale $R(z)$ che ammette come poli z_1, \dots, z_m con $|z_1| < |z_2| < \dots < |z_m|$. Poiché ogni possibile corona di convergenza non può contenere poli, avremo le seguenti $m+1$ corone di convergenza:

$$C_1 = \{z : |z| < |z_1|\}, \dots, C_k = \{z : |z_k| < |z| < |z_{k+1}|\}, \dots, C_{m+1} = \{z : |z_m| < |z|\}.$$

La sequenza $x_k(n)$ che ammette come trasformata z la funzione $X(z)$ definita sulla corona C_k , può essere ottenuta come segue:

$$x_k(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{L_k} X(z)z^{n-1}dz,$$

dove L_k è un cammino chiuso contenuto in C_k . Espandendo $X(z)$ in frazioni parziali in z^{-1} si ottiene:

$$X(z) = \sum_{k=1}^m \frac{A_k}{1 - z_k z^{-1}},$$

pertanto:

$$x_k(n) = \oint_{L_k} X(z)z^{n-1}dz = \sum_{j=1}^m \oint_{L_k} \frac{A_j}{1 - z_j z^{-1}} z^{n-1}dz = \sum_{j=1}^k A_j z_j^n u(n).$$

7.3 Analisi di Sistemi LTI a Tempo Discreto: Stabilità e Causalità

Sia dato un sistema LTI S a tempo discreto; sappiamo dal Capitolo 1 che l'uscita $y(n)$ del sistema S avente come ingresso il segnale $x(n)$ è ottenuto dalla convoluzione di $x(n)$ con $h(n)$, dove $h(n)$ è la risposta del sistema all'impulso unitario $\delta(n)$:

$$y(n) = h(n) * x(n).$$

Dalla proprietà di convoluzione (riportata in Tabella 7.2) si ottiene che:

$$Y(z) = H(z)X(z),$$

dove $Y(z)$, $H(z)$ e $X(z)$ sono rispettivamente la trasformata z di $y(n)$, $h(n)$ e $x(n)$. Riassumendo si ha quindi l'importante risultato:

Fatto 7.1. Dato un sistema LTI la cui risposta all'impulso è $h(n)$, detta $Y(z)$, $X(z)$ e $H(z)$ rispettivamente la trasformata z dell'uscita $y(n)$, dell'ingresso $x(n)$ e della risposta all'impulso $h(n)$, allora:

$$Y(z) = H(z)X(z).$$

La funzione $H(z)$ è chiamata funzione di trasferimento del sistema.

Questo risultato è illustrato in Figura 7.5.

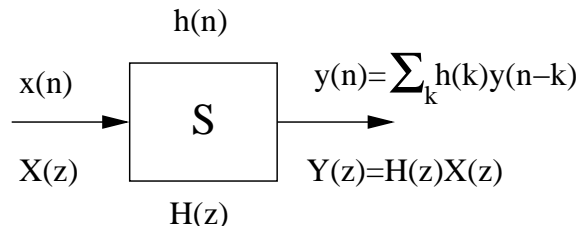


Figura 7.5 Funzione di trasferimento del sistema S.

Studiamo ora le caratteristiche della funzione di trasferimento di un sistema LTI quando questo risulta essere causale e/o stabile.

Ricordiamo che un sistema LTI è causale se, detta $h(n)$ la risposta del sistema all'impulso unitario, risulta che $h(n) = 0$ quando $n < 0$; ne segue che:

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} h(n)z^{-n}.$$

Poichè nella serie di potenze precedente non appaiono potenze di z con esponente positivo, la regione di convergenza include $z = \infty$. Riassumendo, abbiamo il seguente

Fatto 7.2. La regione di convergenza della funzione di trasferimento $H(z)$ di un sistema LTI causale è la regione esterna al cerchio con centro nell'origine e la cui circonferenza passa per il polo di $H(z)$ più lontano dall'origine.

Si osservi che la causalità definisce univocamente la funzione di trasferimento e la sua regione di convergenza; si osservi inoltre che per funzioni di trasferimento del tipo $H(z) = z^m$, con $m > 0$ il polo più lontano dall'origine è $z = \infty$.

Esempio 7.3.1.

La funzione $X(z)$ riportata nell'Esempio 7.2.3 rappresenta la funzione di trasferimento di un sistema causale se e solo se è associata alla regione di convergenza $|z| > a$, essendo a il polo di modulo massimo. Infatti, in questo caso la sua antitrasformata $x(n)$ risulta nulla per $n < 0$ essendo:

$$x(n) = (a^n - b^n) u(n).$$

Viceversa, la stessa funzione associata alla regione di convergenza descritta dalla corona $b < |z| < a$, come mostrato nell'Esempio 7.2.4, non può essere la funzione di trasferimento di un sistema causale poichè la sua antitrasformata $x(n)$ vale per $x(n) = b^n$ $n < 0$ essendo:

$$x(n) = a^n u(n) + b^n u(-n - 1).$$

Lo stesso vale per la regione di convergenza della funzione data nell'Esempio 7.2.

Come discusso nel Capitolo 1, un sistema è stabile (BIBO) se la sua risposta a un ingresso limitato risulta a sua volta limitata.

Una caratterizzazione dei sistemi LTI stabili è stata data in termini di assoluta sommabilità della risposta $h(n)$ all'impulso, mostrando che il sistema è stabile se e solo se $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < +\infty$.

Osservando ora che quando $|z| = 1$ si ha:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)z^{-n}|,$$

si può concludere che per $|z| = 1$ la serie $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)z^{-n}$ è assolutamente convergente quindi convergente. Allora per $|z| = 1$ la trasformata $H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)z^{-n}$ è definita.

Fatto 7.3. *Un sistema LTI è stabile se la regione di convergenza della funzione di trasferimento $H(z)$ contiene la circonferenza di raggio unitario, $|z| = 1$.*

Esempio 7.3.2.

L'integratore numerico presentato nell'Esempio 1.3.4 ha funzione di trasferimento $\frac{1}{1-z^{-1}}$. Essa ha un polo per $z = 1$ quindi l'integratore non è un sistema stabile.

Riassumendo, le condizioni di causalità e di stabilità per il caso in cui la funzione di trasferimento di un sistema LTI è razionale, portano al seguente importante:

Fatto 7.4. *Un sistema LTI è causale e stabile se tutti i poli della sua funzione di trasferimento cadono all'interno del cerchio unitario $|z| = 1$, cioè quando essi hanno tutti modulo minore di 1.*

Esempio 7.3.3.

La funzione $H(z) = \frac{(a-b)z}{(z-a)(z-b)}$ è la funzione di trasferimento di un sistema contemporaneamente causale e stabile se e solo se $\max\{|a|, |b|\} < 1$. Infatti i poli di $H(z)$ sono $z = a$ e $z = b$; essi stanno all'interno del cerchio di raggio 1 se e solo se $|a| < 1$ e $|b| < 1$.

7.4 Trasformata Zeta e Trasformata di Fourier a Tempo Discreto

La trasformata di Fourier a tempo discreto di un segnale $x(n)$ introdotta in Sezione 5.2 è:

$$X_d(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-i\omega n}.$$

in cui utilizziamo la variabile ω per denotare la frequenza di normalizzata alla frequenza di campionamento.

Poichè la trasformata zeta di $x(n)$ è:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-z}.$$

Possiamo allora concludere:

Fatto 7.5. La trasformata di Fourier a tempo discreto $X_d(\omega)$ del segnale $x(n)$

$$X_d(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_d(n)e^{-i\Omega n}, \quad x_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X_d(\Omega)e^{i\Omega n} d\Omega.$$

7.4.1 Risposta in Frequenza di Filtri Lineari a Tempo Discreto

In questa sezione mostriamo la caratterizzazione dei sistemi LTI nel dominio delle frequenze. Questo obiettivo è ottenuto sollecitando il sistema con funzioni esponenziali complesse (o sinusoidali) da cui origina il comportamento caratteristico del sistema descritto dalla funzione della variabile complessa ω , chiamata funzione *risposta in frequenza* del sistema. Il termine risposta in frequenza deriva dal fatto che essa risulta essere la trasformata di Fourier della risposta all'impulso $h(n)$. Questa funzione è di fondamentale importanza perché non si limita a descrivere il comportamento del sistema a fronte di singoli esponenziali complessi, ma anche a fronte di combinazioni lineari degli stessi che, come visto nelle trattazioni espone nel capitolo precedente, permettono di sintetizzare segnali aperiodici a tempo discreto del tutto generali.

Supponiamo di operare con sistemi LTI cui si applicano segnali a tempo discreto ottenuti per campionamento con passo τ o equivalentemente con frequenza di campionamento $\nu_s = 1/\tau$. Obiettivo di questa sezione è studiare la risposta di un sistema LTI a ingressi sinusoidali di frequenza multipla di ω (rad/sec) del tipo $e^{i\omega\tau n}$. Per semplicità, porremo $\tau = 1$, giacché i risultati ottenuti si adattano facilmente al caso generale e interpretiamo ω come frequenza normalizzata alla frequenza di campionamento ν_s Hz; con queste scelte la frequenza ω risulta confinata nell'intervallo $[-\pi, \pi]$.

Sia $h(n)$ la risposta del sistema all'impulso unitario $\delta(n)$; la risposta $y(n)$ del sistema al segnale d'ingresso $x(n) = e^{i\omega n}$ è la convoluzione di $h(n)$ ed $e^{i\omega n}$, cioè:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)e^{i\omega(n-k)} = e^{i\omega n} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)e^{-i\omega k}.$$

Ricordando che $H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)z^{-k}$ è la trasformata z di $h(n)$, si definisce

$$H(e^{i\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)e^{-i\omega k}$$

e viene chiamata *risposta in frequenza* del sistema LTI. Secondo quanto mostrato, la risposta del sistema all'esponenziale complesso risulta:

$$y(n) = e^{i\omega n} H(e^{i\omega}),$$

data dunque dal segnale esponenziale di uguale frequenza, alterato dal fattore $H(e^{i\omega})$. Dal punto di vista sistemistico, le funzioni esponenziali complesse vengono anche dette autofunzioni del sistema: funzioni per le quali il sistema produce un'uscita che differisce dall'ingresso di un fattore moltiplicativo costante, detto autovalore del sistema.

Quanto scitto ci porta ad asserire:

Teorema 7.1. La risposta di un sistema LTI a segnali sinusoidali di tipo $e^{i\omega n}$ è completamente descritta dalla sua risposta in frequenza $H(e^{i\omega})$, cioè dalla funzione di trasferimento valutata sulla circonferenza unitaria. In particolare:

- $|H(e^{i\omega})|$ è il guadagno della risposta sul segnale $e^{i\omega n}$ di frequenza ω ;
- $\angle H(e^{i\omega})$ è la variazione di fase della risposta rispetto a quella del segnale $e^{i\omega n}$ di frequenza ω .

Esempio 7.4.1.

Determinare l'uscita del sistema con risposta all'impulso

$$h(n) = (0.7)^n u(n)$$

quando l'ingresso è l'esponenziale complesso

$$x(n) = 2 e^{i\frac{\pi}{2}n}, \quad -\infty < n < +\infty.$$

Calcoliamo innanzitutto la risposta in frequenza del sistema (trasformata di Fourier del segnale $h(n)$) a partire dalla funzione di trasferimento $H(z)$:

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.7z^{-1}} \quad \Rightarrow \quad H(e^{i\omega}) = \frac{1}{1 - 0.7e^{-i\omega}},$$

che valutata in $\omega = \frac{\pi}{2}$ vale

$$H(e^{i\frac{\pi}{2}}) = \frac{1}{1 + i0.7} = 0.8e^{-i36.87^\circ},$$

da cui ricaviamo l'uscita del sistema:

$$y(n) = 2 e^{i\frac{\pi}{2}n} H(e^{i\frac{\pi}{2}}) = 1.6 e^{i(\frac{\pi}{2}n - 36.87^\circ)}.$$

L'effetto finale è quello di scalare il modulo di 0.8 e di traslare la frequenza di 36.87° .

Esempio 7.4.2.

Determinare il guadagno della risposta in frequenza del sistema che ha la seguente relazione ingresso-uscita:

$$y(n) = x(n) - x(n-1).$$

La risposta all'impulso di questo sistema è $h(n) = \delta(n) - \delta(n-1)$. La funzione di trasferimento risulta dunque $H(z) = 1 - z^{-1}$ e di conseguenza la risposta in frequenza è data da $H(e^{i\omega}) = 1 - e^{-i\omega}$. Il guadagno risulta infine:

$$|H(e^{i\omega})|^2 = (1 - \cos \omega)^2 + \sin^2 \omega = 4 \sin^2 \frac{\omega}{2}$$

ed è mostrato in Figura 7.6.

Dal grafico della funzione guadagno si evince che questo sistema si comporta come un filtro passa-alto, che inibisce le componenti a bassa frequenza ($\omega \approx 0$) e lascia passare quelle ad alta frequenza ($\omega \approx \pi$).

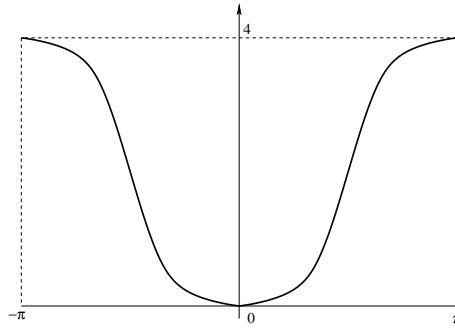


Figura 7.6 Guadagno del filtro passa-alto con funzione di trasferimento $1 - z^{-1}$.

7.4.2 Risposta in Frequenza nel Caso di Funzioni di Trasferimento Razionali

Studiamo ora come determinare la risposta all'impulso di un sistema, conoscendone la risposta in frequenza. A tal riguardo, si osserva che la risposta in frequenza $H(e^{i\omega})$ è la trasformata di Fourier a tempo discreto della risposta all'impulso $h(n)$, studiata in Sezione 5.2. La risposta all'impulso può essere ottenuta determinando i coefficienti della serie di Fourier $H(e^{i\omega})$:

$$H(e^{i\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)e^{-ik\omega}, \quad h(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} H(e^{i\omega})e^{ik\omega} d\omega.$$

Esempio 7.4.3.

Determinare la risposta all'impulso $h(k)$ di un filtro passa basso ideale di frequenza di taglio $\pi/2$ e fase 0. Per ipotesi, la risposta in frequenza $H(e^{i\omega})$ del sistema è:

$$H(e^{i\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Ne segue:

$$h(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} H(e^{i\omega})e^{ik\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} e^{ik\omega} d\omega = \frac{\sin \frac{k\pi}{2}}{k\pi}$$

Si osserva che il filtro non è causale né stabile.

Supponiamo ora che la funzione $H(z)$ di trasferimento del filtro sia razionale. Se il filtro è causale e stabile, sappiamo che i poli di $H(z)$ sono tutti contenuti nel cerchio unitario.

Il modulo della risposta in frequenza $G(\omega) = |H(e^{i\omega})|$ è una funzione non negativa e periodica di periodo 2π . Alcune considerazioni geometriche possono essere utili per ottenere il comportamento qualitativo di $G(\omega)$. Cominciamo a rilevare che, essendo $H(z)$ una funzione razionale in z^{-1} , possiamo esprimere il numeratore e il denominatore come prodotto di binomi di primo grado in z^{-1} ottenendo:

$$H(z) = A \frac{\prod_{k=1}^M (1 - a_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^L (1 - b_k z^{-1})},$$

dove a_1, \dots, a_M sono gli zeri e b_1, \dots, b_L sono i poli di $H(z)$.

Vale:

$$G(\omega) = |A| \frac{\prod_{k=1}^M |1 - a_k e^{-i\omega}|}{\prod_{k=1}^L |1 - b_k e^{-i\omega}|}.$$

Possiamo allora osservare:

- se $a \approx 0$, allora $|1 - ae^{-i\omega}| \approx 1$: poli o zeri vicini all'origine non portano nessun rilevante contributo a $G(\omega)$;
- se lo zero a_k è "vicino" alla circonferenza unitaria, cioè $a_k \approx e^{-i\omega_k}$ per un opportuno ω_k , allora $|1 - a_k e^{-i\omega_k}| \approx 0$ e quindi $G(\omega_k) \approx 0$: per frequenze corrispondenti a zeri "vicini" alla circonferenza unitaria, la funzione $G(\omega)$ è vicina a zero.

In Figura 7.7 sono rappresentati con una crocetta i poli e con un cerchietto gli zeri di una funzione razionale $H(z)$; nella stessa figura si mostra il modulo della risposta in frequenza del filtro con funzione di trasferimento $H(z)$.

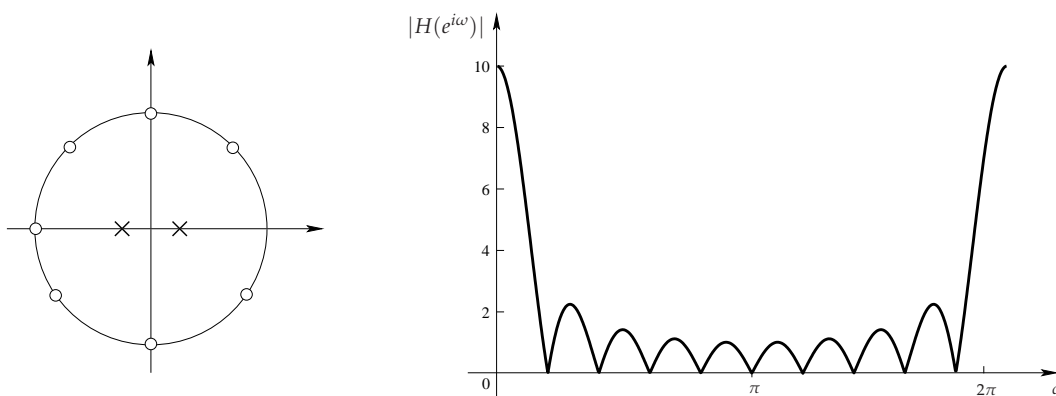


Figura 7.7 Effetto dei poli e degli zeri sul modulo della risposta in frequenza.

Per quanto riguarda la fase, si osserva che:

$$\angle H(e^{-i\omega}) = \sum_{k=1}^M \angle(1 - a_k e^{-i\omega}) - \sum_{k=1}^L \angle(1 - b_k e^{-i\omega}).$$

Essa può quindi essere ottenuta considerando separatamente i contributi $\angle(1 - ae^{-i\omega})$ per ogni polo o zero a , sommando i contributi dovuti agli zeri e sottraendo i contributi dovuti ai poli.

7.5 Sistemi in Multifrequenza: Decimazione e Interpolazione

I moderni sistemi digitali possono processare i dati a più di una frequenza di campionamento. Alcuni esempi sono stati discussi in Sezione 4.3.1, dove vengono esplorati i vantaggi ottenibili dal sovracampionamento. Le due operazioni base che permettono di modificare

digitalmente le frequenze sono la *decimazione* e l'*interpolazione*: l'interpolazione aumenta la frequenza di campionamento, la decimazione la riduce, comprimendo di fatto i dati. Naturalmente questi obiettivi devono essere ottenuti senza introdurre effetti indesiderati, come errori di quantizzazione o aliasing.

La decimazione \downarrow_M di un fattore M è ottenuta da un sistema con la seguente relazione ingresso-uscita:

$$M(x(n)) = x(Mn).$$

In Figura 7.8 è rappresentato la relazione ingresso-uscita per la decimazione con $M = 3$.

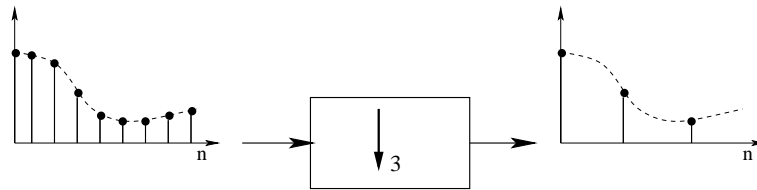


Figura 7.8 Operazione di decimazione.

Tale sistema è chiaramente lineare, ma non tempo invariante: vogliamo qui studiarne la risposta in frequenza. A tal riguardo, siano $X(z)$ e $Y(z)$ le trasformate zeta rispettivamente dell'ingresso $x(n)$ e dell'uscita $y(n) = x(Mn)$; le funzioni $F(\omega) = X(e^{i\omega})$ e $G(\omega) = Y(e^{i\omega})$, periodiche di periodo 2π , descrivono lo spettro di frequenza di $x(n)$ e $y(n)$. La relazione tra $F(\omega)$ e $G(\omega)$ è stabilita nel seguente:

Fatto 7.6. Se $F(\omega)$ e $G(\omega)$ sono lo spettro di frequenza di segnali rispettivamente in ingresso e uscita all'operazione di decimazione con fattore M , vale:

$$G(\omega) = \frac{1}{M} \left(F(\omega) + F\left(\omega - \frac{2\pi}{M}\right) + \dots + F\left(\omega - \frac{2(M-1)\pi}{M}\right) \right).$$

Osserviamo che la funzione $G(\omega)$ è periodica di periodo $2\pi M$: se F_s è la frequenza di campionamento del segnale di ingresso, la frequenza del segnale di uscita risulta $\frac{F_s}{M}$. Osserviamo inoltre che il segnale di ingresso può essere perfettamente ricostruito dal segnale di uscita se si evita il fenomeno dell'aliasing, e cioè se il limite di banda del segnale di ingresso è $\frac{\pi}{M}$. Se quindi desideriamo che l'operazione di decimazione non crei perdita di informazione rispetto al segnale di ingresso, tale operazione dovrà essere preceduta da un filtro passa-basso, con frequenza di taglio $\frac{\pi}{M}$. In Figura 7.9 viene mostrato il sistema Decimatore, composto da un filtro anti-aliasing e dall'operazione di decimazione.

L'interpolazione di segnali digitali ha forti similitudini con la conversione digitale-analogica: in questo caso, tuttavia, il segnale di uscita continua ad essere digitale, anche se "campionato" a frequenza più alta. Più precisamente, un interpolatore con fattore L trasforma un segnale campionato con frequenza F_s in uno campionato con frequenza LF_s . In Figura 7.10 è rappresentato un sistema Interpolatore (con fattore 3).

Esso è costituito da un'operazione di interpolazione \uparrow_L che inserisce, tra $x(n)$ e $x(n+1)$, $L-1$ campioni a valore 0. Il nuovo segnale viene poi filtrato con un filtro digitale passa-basso a frequenza di taglio $\frac{F_s}{2L}$, dove F_s è la frequenza di campionamento di $x(n)$. Poiché l'inserzione di $L-1$ zeri "distribuisce" l'energia di un campione su L campioni, l'uscita

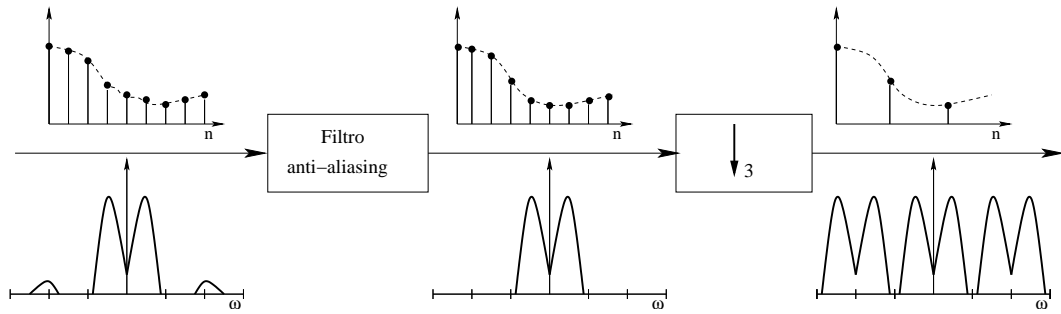


Figura 7.9 Sistema Decimatore.

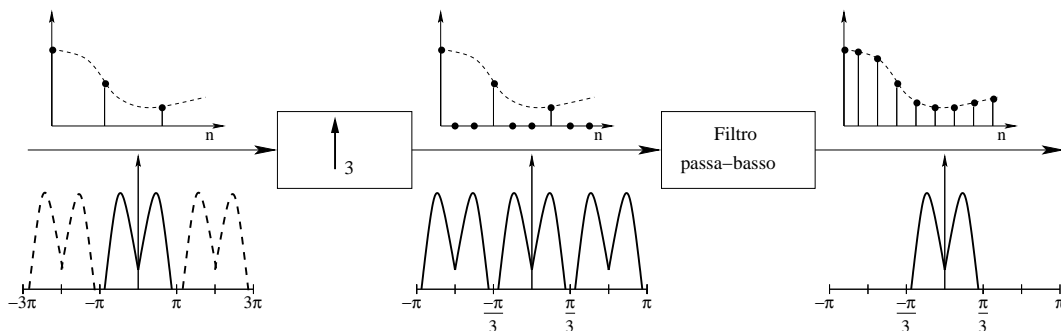


Figura 7.10 Sistema Interpolatore.

$y(n)$ risulta attenuata di un fattore $\frac{1}{L}$: questo fatto può essere compensato moltiplicando per L il valore dell'uscita.

Come è ben evidenziato dalla rappresentazione in frequenza, il Decimatore e l'Interpolatore rappresentano sistemi l'uno inverso dell'altro.

Esempio 7.5.1.

Conversione di frequenze per fattori non interi.

Determinare un sistema che permette di trasferire il contenuto di un CD a 44.1 kHz su un nastro audio digitale a 48 kHz.

Una possibile soluzione è data dalla composizione sequenziale di un interpolatore a fattore L con un decimatore a fattore M , tale che $\frac{L}{M} = \frac{48}{44.1}$. Poiché $\frac{48}{44.1} = \frac{160}{147}$ si può porre $L = 160$ e $M = 147$: per prima cosa la frequenza di campionamento dei dati su CD è interpolata con $L = 160$ ottenendo una frequenza di 7056 kHz, poi ridotta con $M = 147$ a 48 kHz.

È utile osservare che l'interpolatore deve precedere il decimatore, altrimenti il processo di decimazione rimuove alcune componenti in frequenza.