

## TRASFORMATA DISCRETA DI FOURIER

La trasformata di Fourier permette di trattare i segnali a tempo continuo dal punto di vista delle loro componenti armoniche (analisi in frequenza). In modo analogo la trasformata di Fourier a tempo discreto permette l'analisi in frequenza dei segnali a tempo discreto. Questo argomento viene trattato in Sezione 1 e ripreso, in connessione alla Trasformata zeta, in Capitolo 7.

I segnali a tempo discreto possono essere approssimati con segnali digitali. L'analisi in frequenza di tali segnali può essere ottenuta mediante la Trasformata Discreta di Fourier (DFT), motivata in Sezione 2 e trattata in dettaglio in Sezione 3. La DFT è diventata popolare negli anni 50, proprio in relazione alla crescente importanza dei sistemi di elaborazione digitali. Un salto di qualità nell'utilizzo della DFT è stata la scoperta di una classe di algoritmi veloci, genericamente chiamata FFT (Fast Fourier Transform), che permette di calcolare la DFT in tempo quasi lineare nella dimensione dei dati.

Il calcolo diretto della DFT è piuttosto costoso, richiedendo  $O(N^2)$  operazioni di prodotto, dove  $N$  è la dimensione dello spazio su cui si applica la trasformata. Utilizzando essenzialmente tecniche "divide et impera", si ottengono algoritmi FFT che calcolano la DFT riducendo a  $O(N \log N)$  il numero di costose operazioni di moltiplicazione, come discusso in Sezione 4. La drastica riduzione del tempo di calcolo porta a significativi vantaggi ampliando il campo delle possibili applicazioni.

Nell'elaborazione dei segnali la FFT ha tre principali settori di utilizzo:

1. analisi spettrale per segnali digitali, con applicazioni alla sintesi di filtri digitali;

2. calcolo veloce della convoluzione e della correlazione;
3. compressione di dati per la memorizzazione e la trasmissione efficiente degli stessi.

Questi argomenti sono trattati in Sezione 5.5.

Gli algoritmi per la FFT si sono imposti come tecnica di base per l'elaborazione dei segnali dopo il lavoro di Cooley e Tukey [CooTu65]. Cooley, Lewis e Welch [CooLeWe68] attribuiscono questo metodo a Runge (1903); altri autori ne fanno risalire le idee principali addirittura a Gauss.

La FFT è trattata in quasi tutti i testi su elaborazione digitale dei segnali (si veda ad esempio [IfeJer02]) e presenta aspetti di interesse nell'area degli algoritmi (si veda ad esempio [AhHoUl74]); un testo unicamente dedicato a questo argomento è [Bri88]. Tutti gli ambienti s/w per il trattamento di segnali contengono procedure per la FFT e gli attuali elaboratori digitali calcolano la DFT a velocità tale da permettere l'elaborazione in tempo reale di molti segnali, includendo quelli vocali.

## 5.1 Segnali Periodici a Tempo Discreto

Per comprendere la natura dei segnali periodici a tempo discreto, consideriamo il segnale sinusoidale (o fasore)

$$x(n) = A \cos(\Omega n + \theta), \quad -\infty < n < \infty,$$

dove  $n$  è una variabile discreta che denota l'ennesimo campione,  $A$  è l'ampiezza della sinusoide,  $\Omega$  è la frequenza in *radiani per campione* e  $\theta$  è la fase in *radiani*.

Per denotare la frequenza, in luogo alla variabile  $\Omega$ , si usa spesso la variabile  $\Phi$ , legata alla precedente dalla relazione

$$\Omega = 2\pi\Phi,$$

ed ha una dimensione di *cicli per campione*. Con questa posizione il segnale sinusoidale diventa:

$$x(n) = A \cos(2\pi\Phi n + \theta), \quad -\infty < n < \infty. \quad (5.1)$$

Notiamo anzitutto le differenti dimensioni fisiche per la pulsazione e la frequenza rispetto al caso a tempo continuo, derivanti dal fatto che il tempo continuo  $t$  si misura in secondi, mentre il tempo discreto  $n$  va considerato adimensionale.

La Figura 5.1 mostra una sinusoide con frequenza  $\Omega = \pi/6$  radianti per campione (corrispondenti a  $\Phi = 1/12$  cicli per campione) e fase  $\theta = \pi/3$  radianti.

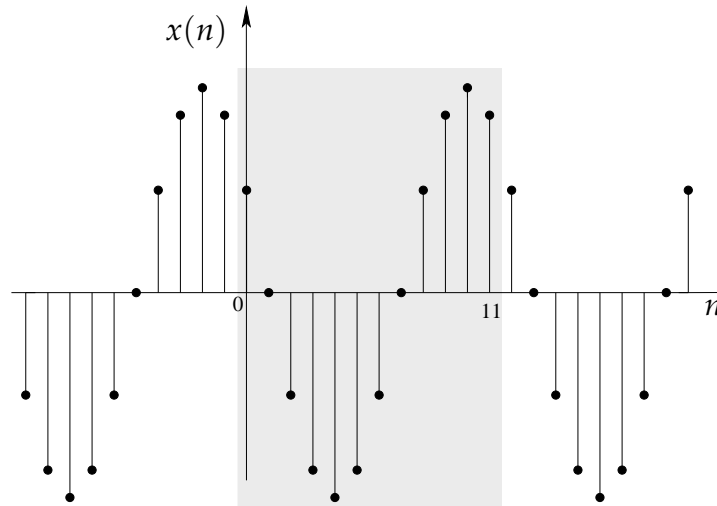
In contrasto con il caso a tempo continuo, che risulta periodico per ogni  $\omega \in \mathbb{R}$ , il segnale sinusoidale a tempo discreto è periodico solo se la sua frequenza è un numero razionale. Infatti, se il fasore è periodico di periodo  $N$  ed ha una frequenza  $\Phi_0$ , deve valere:

$$\cos(2\pi\Phi_0(n + N) + \theta) = \cos(2\pi\Phi_0 n + \theta),$$

che risulta vera se esiste un intero  $k$  tale che:

$$2\pi\Phi_0 N = 2k\pi, \quad \text{o equiv.} \quad \Phi_0 = \frac{k}{N}.$$

Naturalmente il periodo fondamentale è dato dal più piccolo intero  $N_0$  che rende vera l'espressione precedente e in cui  $k$  ed  $N_0$  risultano coprimi. Inoltre, il valore assoluto  $|k|$



**Figura 5.1** Segnale sinusoidale  $x(n) = A \cos(\pi/6n + \pi/3)$  a tempo discreto. La frequenza, misurata in cicli per campione, è  $\Phi = 1/12$ .

del numeratore rappresenta il numero di giri che effettua il fasore prima di riportarsi nella posizione iniziale; il segno di  $k$  è legato al verso di rotazione del fasore (orario se  $k < 0$ , antiorario se  $k > 0$ ).

Un'altra proprietà fondamentale di questi segnali è la *periodicità in frequenza*: due sinusoidi a tempo discreto le cui frequenze sono separate da un multiplo di  $2\pi$  sono identiche.

Questa asserzione può essere provata semplicemente osservando che

$$\cos((\Omega_0 + 2\pi)n + \theta) = \cos(\Omega_0 n + 2\pi n + \theta) = \cos(\Omega_0 n + \theta).$$

Come conseguenza, possiamo restringere il range di frequenze all'intervallo  $[-\pi, \pi]$  se misurate in radianti per campione o all'insieme  $[-1/2, 1/2]$  se misurate in cicli per campione, essendo i segnali con frequenze al di fuori di questo range degli alias di quelli che hanno le frequenze ivi contenute. In altri termini, per segnali a tempo discreto avremo sempre:

$$-\pi \leq \Omega \leq \pi, \quad \text{oppure} \quad -\frac{1}{2} \leq \Phi \leq \frac{1}{2}.$$

Si dovrebbe altresì notare che le frequenze massime si hanno in corrispondenza di  $\Omega = \pm\pi$  (o equivalentemente  $\Phi = \pm 1$ ), per i cui valori il segnale sinusoidale produce una sequenza alternata di 1 e  $-1$ .

D'ora in avanti considereremo un segnale a tempo discreto  $x(n)$  come il risultato del campionamento regolare di un segnale a tempo continuo  $f(t)$ .

$$x(n) = f(n\tau), \quad -\infty < n < \infty.$$

Questo fatto ci permette di stabilire una relazione tra la variabile tempo continuo  $t$  e quello tempo discreto  $n$  che si ripercuote in una relazione altrettanto stretta tra le rispettive frequenze  $\omega$  e  $\Omega$ . Infatti, poiché campionare il segnale sinusoidale a tempo continuo  $f(t) = A \cos(2\pi vt + \theta)$  con periodo  $\tau$  o frequenza  $\nu_s = 1/\tau$  significa ottenere il segnale a tempo discreto

$$x(n) = f(n\tau) = A \cos(2\pi \nu n \tau + \theta) = A \cos(2\pi n \frac{\nu}{\nu_s} + \theta). \quad (5.2)$$

Confrontando ora la (5.1) con la (5.2) si deduce che  $\nu$  e  $\Phi$  sono linearmente legate da

$$\Phi = \frac{\nu}{\nu_s}, \quad \text{o equiv.} \quad \Omega = \omega\tau,$$

che giustifica il nome di *frequenza normalizzata* che spesso si attribuisce alla variabile  $\Phi$ .

Per quanto visto finora relativamente alle frequenze, le principali differenze tra segnali a tempo continuo e a tempo discreto si possono riassumere in:

$$-\infty < \omega < \infty, \quad \text{e} \quad -\infty < \nu < \infty$$

per il tempo continuo;

$$-\pi \leq \Omega \leq \pi, \quad \text{e} \quad -\frac{1}{2} \leq \Phi \leq \frac{1}{2}.$$

per il tempo discreto.

Questi risultati ci permettono di stabilire con esattezza la banda di frequenze risultante dal campionamento periodico con frequenza  $\nu_s$  di un segnale  $f(t)$ :

$$-\frac{1}{2\tau} = -\frac{\nu_s}{2} \leq \nu \leq \frac{\nu_s}{2} = \frac{1}{2\tau}, \quad \text{o equiv.} \quad -\frac{\pi}{\tau} = -\pi\nu_s \leq \omega \leq \pi\nu_s = \frac{\pi}{\tau}.$$

Suggeriscono anche che il massimo valore delle frequenze presenti nel segnale campionato  $x(n)$  è  $\Omega_{\max} = \pi/\tau$  o  $\Phi_{\max} = 1/2\tau$ . Dal teorema del campionamento sappiamo che il campionamento periodico introduce un'ambiguità che si elimina a patto di rispettare (quando possibile) il criteriodi Nyquist, altrimenti più segnali analogici possono dare luogo allo stesso segnale a tempo discreto  $x(n)$ , perdendo di fatto l'univocità nella ricostruzione.

## 5.2 Trasformata di Fourier a Tempo Discreto (DTFT)

La trasformata e l'antitrasformata di Fourier introdotte nel Capitolo 2 operano su segnali continui, sia nel dominio dei tempi che delle frequenze, e sono definite da:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt, \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega.$$

Fissato un intervallo di ampiezza  $\tau$ , per ogni segnale  $f(t)$  consideriamo il segnale  $f_s(t)$  ottenuto campionando  $f(t)$  ai tempi  $n\tau$  ( $-\infty < n < \infty$ ), e concentrando l'energia ai tempi di campionamento; mediante la funzione impulsiva  $\delta(t)$  tale segnale può essere riscritto:

$$f_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n\tau)\delta(t - n\tau).$$

La Figura 5.2 mostra un segnale  $f(t)$  ed il corrispondente segnale campionato  $f_s(t)$ .

Ricordando che  $\mathcal{F}\{\delta(t - t_0)\} = e^{-i\omega t_0}$ , per la proprietà di linearità la trasformata di Fourier di  $f_s(t)$  risulta essere:

$$F_s(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n\tau)e^{-i\omega n\tau}. \quad (5.3)$$

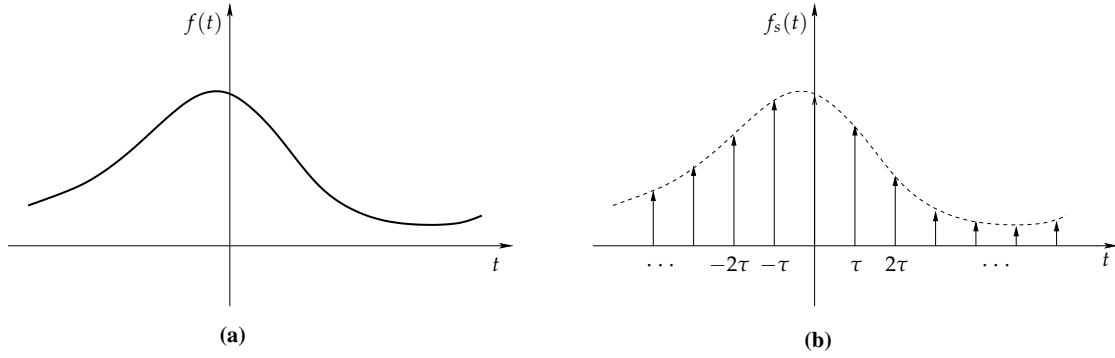


Figura 5.2 (a) Segnale  $f(t)$  continuo. (b) Segnale  $f_s(t)$  campionato.

Infatti:

$$\begin{aligned}
 F_s(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n\tau) \delta(t - n\tau) e^{-i\omega t} dt \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n\tau) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\tau) e^{-i\omega t} dt \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n\tau) e^{-i\omega n\tau}.
 \end{aligned}$$

Operiamo ora il cambio di variabile  $\omega\tau = \Omega$ . Denotando con  $\nu_s = \frac{1}{\tau}$  la frequenza di campionamento in Hz, risulta che  $\Omega = \frac{\omega}{\nu_s}$ . Come detto sopra, la variabile  $\Omega$  assume dunque significato di frequenza normalizzata alla frequenza di campionamento; poiché  $\omega$  è data in rad/sec, mentre  $\nu_s$  è data in cicli/sec,  $\Omega$  è data in radianti.

Poniamo ora:

$$x(n) = f(n\tau), \quad X(\Omega) = F_s\left(\frac{\Omega}{\tau}\right).$$

Con le nuove notazioni, possiamo definire la trasformata di Fourier di un segnale a tempo discreto come:

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-i\Omega n}. \quad (5.4)$$

In quest'ottica,  $X(\Omega)$  rappresenta la decomposizione di  $x(n)$  nelle componenti in frequenza  $e^{-i\Omega n}$ .

Osserviamo due differenze sostanziali tra la trasformata di un segnale a tempo discreto avente energia finita e un segnale a tempo continuo anch'esso ad energia finita. La prima è che la trasformata del segnale continuo, e quindi il suo spettro, ha frequenze nell'insieme  $(-\infty, +\infty)$ . Diversamente, per segnali a tempo discreto, il range di frequenze è unico nell'intervallo  $[0, 2\pi]$  o equivalentemente  $[-\pi, \pi]$ . La seconda differenza basilare, conseguenza del tempo discreto, è che la trasformata a tempo discreto implica una sommatoria mentre quella a tempo continuo un integrale.

Come mostrato per la sinusoida discreta, la restrizione all'intervallo  $[-\pi, \pi]$  per la trasformata a tempo discreto risulta evidente dalla seguente proprietà di periodicità:

$$X(\Omega + 2\pi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-i(\Omega+2\pi)n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-i\Omega n} = X(\Omega)$$

ossia, la funzione  $X(\Omega)$  risulta periodica di periodo  $2\pi$ . In virtù della proprietà appena illustrata, vale dunque la seguente espansione in serie di Fourier:

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-i\Omega n}, \quad x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(\Omega)e^{i\Omega n} d\Omega.$$

I coefficienti della serie sono quindi i valori della sequenza  $x(n)$ .

Riassumiamo la discussione precedente nel seguente:

**Fatto 5.1.** Sia  $f_s(t)$  il segnale ottenuto campionando  $f(t)$  con passo  $\tau$  e sia  $F_s(\omega)$  la sua trasformata di Fourier. Posto  $x(n) = f(n\tau)$  e  $X(\Omega) = F_s(\frac{\Omega}{\tau})$  vale:

$$\boxed{X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-i\Omega n}, \quad x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(\Omega)e^{i\Omega n} d\Omega.} \quad (5.5)$$

Le due trasformazioni riportate in Fatto 5.5 sono dette rispettivamente *trasformata e antitrasformata di Fourier a tempo discreto* e, per sottolineare il fatto che la corrispondenza tra le due funzioni è biunivoca, viene spesso usata la scrittura

$$x(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}_d} X(\Omega).$$

### Esempio 5.2.1.

Determinare la trasformata di Fourier a tempo discreto di

$$x(n) = a^n u(n), \quad a \in \mathbb{R}.$$

Poiché la sequenza  $x(n)$  è assolutamente sommabile (serie geometrica con base minore di 1), la trasformata esiste ed è ottenuta applicando la (5.5).

Quindi:

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u(n)e^{-i\Omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n e^{-i\Omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (ae^{-i\Omega})^n.$$

Visto che  $|ae^{-i\Omega}| = |a| < 1$ , la somma della serie geometrica è finita e vale

$$X(\Omega) = \frac{1}{1 - ae^{-i\Omega}}, \quad |a| < 1.$$

Per  $|a| > 1$  la trasformata di Fourier di  $a^n u(n)$  non esiste.

Possiamo concludere che:

$$a^n u(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}_d} \frac{1}{1 - ae^{-i\Omega}}, \quad |a| < 1.$$

Lo spettro del segnale esponenziale decrescente è:

$$|X(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 - 2a \cos \Omega + a^2}}, \quad \angle X(\Omega) = -\arctan \frac{a \sin \Omega}{1 - a \cos \Omega}.$$

La Figura 5.3 mostra lo spettro della trasformata per i due casi:  $0 < a < 1$  e  $-1 < a < 0$ . Si può notare che il valore negativo di  $a$  determina una rapida variazione del segnale che ne sposta lo spettro verso le alte frequenze.

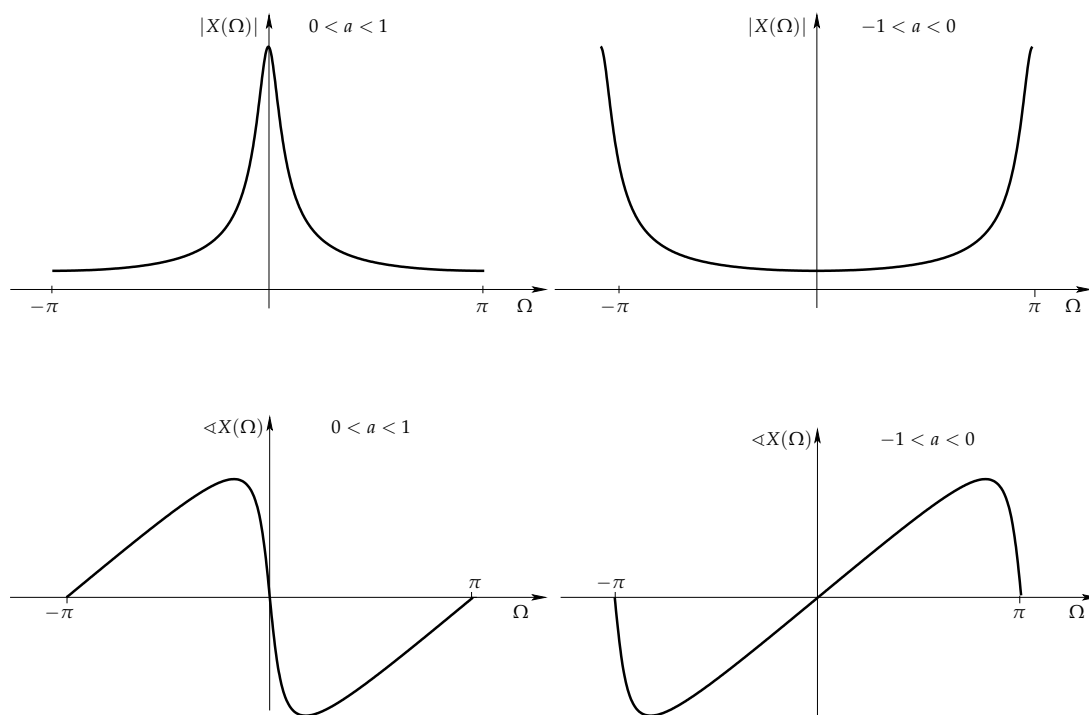


Figura 5.3 Spettro del segnale esponenziale decrescente per i due valori, positivo e negativo, del parametro  $a$ .

### Convergenza della DTFT

Come discusso nel Paragrafo 2.4 del Capitolo 2 a proposito della convergenza della serie di Fourier, spesso la condizione di assoluta sommabilità di  $x(n)$  viene meno, non garantendo così la convergenza uniforme della 5.4. Tuttavia, questa rappresenta solo una condizione sufficiente. Vi sono infatti sequenze che non sono assolutamente sommabili ma che hanno ugualmente definita la trasformata di Fourier: è il caso di segnali che sono quadrato-sommabili o, equivalentemente, ad energia finita:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 < +\infty.$$

Per tali segnali possiamo imporre la condizione di convergenza in media quadratica:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\Omega) - X_N(\Omega)|^2 d\Omega = 0,$$

dove  $X_N(\Omega)$  rappresenta la somma parziale delle prime  $N$  armoniche. Il prossimo esempio considera un noto segnale ad energia finita, la cui trasformata è il filtro passa-basso ideale.

#### Esempio 5.2.2.

Sia data la trasformata

$$X(\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| \leq \Omega_c \\ 0, & \Omega_c < |\Omega| < \pi' \end{cases} \quad (5.6)$$

determinare il segnale  $x(n)$ .

Consideriamo solo l'intervallo  $[-\pi, \pi)$  a causa della periodicità della funzione  $X(\Omega)$ . Allora, per mezzo dell'antitrasformata si ricava il segnale

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) e^{i\Omega n} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_c}^{\Omega_c} e^{i\Omega n} d\Omega = \frac{\sin(\Omega_c n)}{\pi n}, \quad n \neq 0.$$

Per  $n = 0$ , ricaviamo direttamente dalla definizione di trasformata

$$x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_c}^{\Omega_c} d\Omega = \frac{\Omega_c}{\pi}.$$

In definitiva, il segnale che si ottiene antitrasformando la 5.6 è:

$$x(n) = \begin{cases} \frac{\Omega_c}{\pi} & n = 0 \\ \frac{\Omega_c}{\pi} \frac{\sin(\Omega_c n)}{\Omega_c n} & n \neq 0 \end{cases}.$$

La coppia di trasformate è illustrata nei grafici di Figura 5.4, dove  $\Omega_c = \pi/4$ .

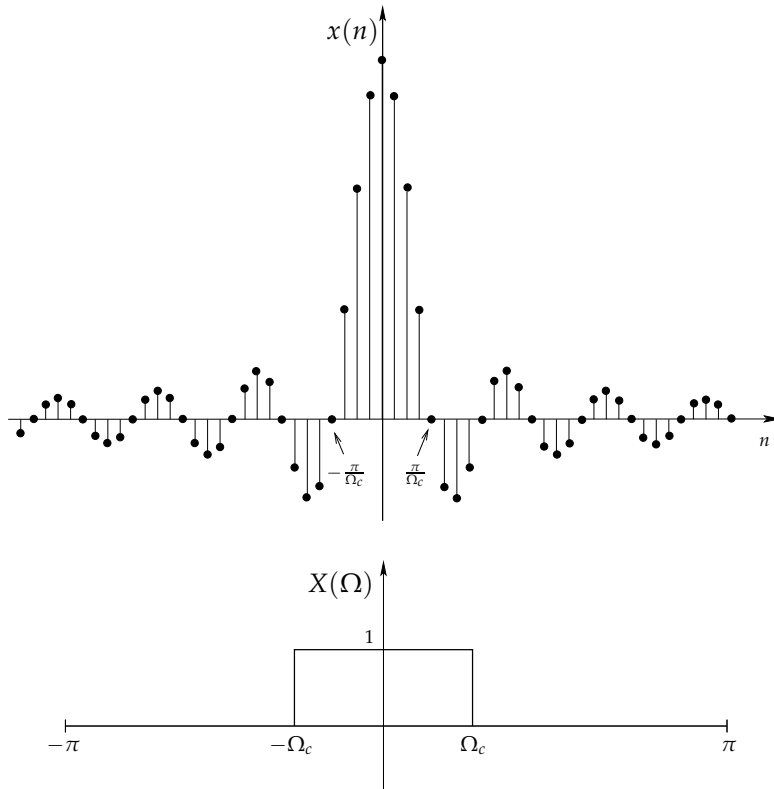


Figura 5.4 Segnale  $\sin(\frac{\pi}{4}n)/\pi n$  a tempo discreto e sua trasformata  $X(\Omega)$ .

In merito alla convergenza di sequenze  $x(n)$  che non sono assolutamente sommabili, come quella dell'esempio precedente, richiamiamo qui le osservazioni riportate nel paragrafo relativo alle serie di Fourier.

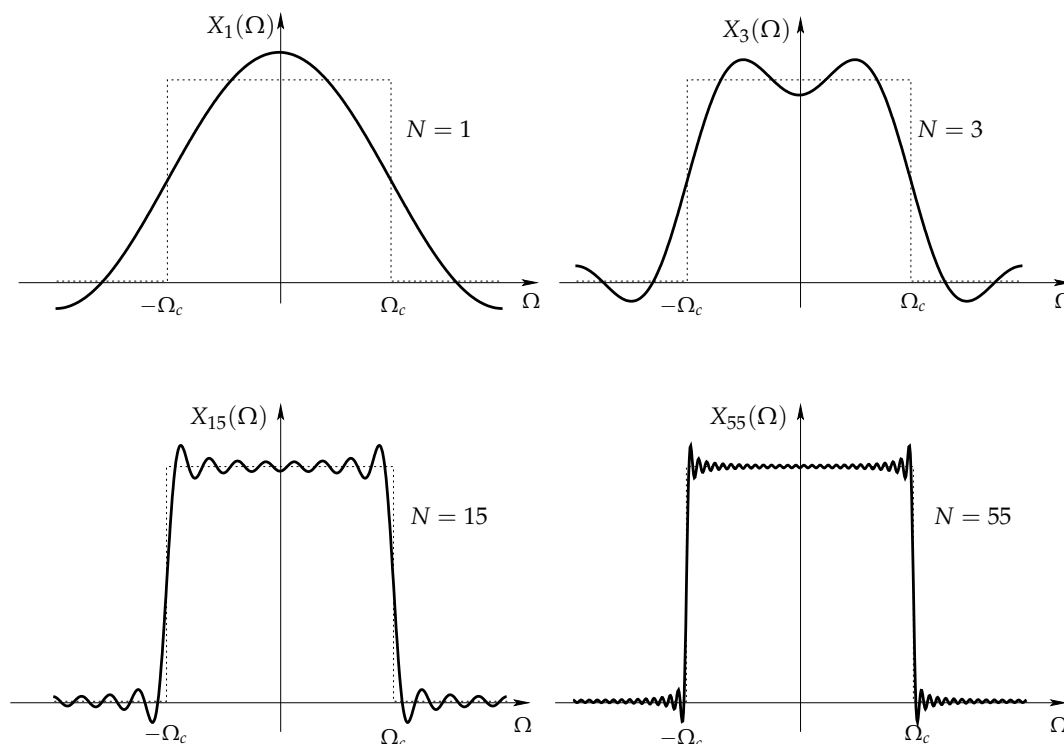
La somma parziale

$$X_N(\Omega) = \sum_{n=-N}^N \frac{\sin(\Omega_c n)}{\pi n} e^{-i\Omega n}$$



non converge uniformemente alla 5.6, ma solo puntualmente e questo fatto implica la presenza di oscillazioni nella  $X_N(\Omega)$  in corrispondenza delle frequenze  $\Omega = \pm\Omega_c$ , indipendentemente dai valori di  $N$ . Quando  $N \rightarrow +\infty$  le oscillazioni convergono ai punti di discontinuità  $\pm\Omega_c$  ma la loro ampiezza non si annulla: questo comportamento è chiamato *fenomeno di Gibbs*. Lo stesso fenomeno è stato osservato nella convergenza delle somme parziali della serie di Fourier per funzioni a tempo continuo periodiche.

La Figura 5.5 mostra la funzione  $X_N(\Omega)$  per vari valori di  $N$ . Si può osservare che col crescere di  $N$  le oscillazioni diventano più rapide, ma la loro ampiezza non si smorza, semplicemente si addossa sempre più al punto di discontinuità  $\Omega_c$ .



**Figura 5.5** Illustrazione della convergenza della trasformata di Fourier e relativo fenomeno di Gibbs nel punto di discontinuità  $\Omega_c$ .

### 5.2.1 Proprietà della Trasformata di Fourier a Tempo Discreto

In questa sezione vengono riportate alcune delle più importanti proprietà della trasformata di Fourier a tempo discreto. Esse risultano di particolare utilità nella semplificazione del processo di analisi di segnali e sistemi, come visto anche per la trasformata a tempo continuo, che può risultare parecchio oneroso in molti casi. Alcune proprietà, come la linearità o la simmetria hermitiana, non vengono richiamate perché la loro dimostrazione ricalca specularmente quelle già viste precedentemente.

#### Traslazione Temporale

Se

$$x(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}_d} X(\Omega), \quad \text{allora} \quad x(n-m) \xleftrightarrow{\mathcal{F}_d} e^{-i\Omega m} X(\Omega).$$

Questa proprietà si prova direttamente operando un cambio di variabile nella della trasformata di  $x(n - m)$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_d \{x(n - m)\} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n - m)e^{-i\Omega n} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)e^{-i\Omega(k+m)} \quad (\text{ponendo } k = n - m) \\ &= e^{-i\Omega m} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)e^{-i\Omega k} = e^{-i\Omega m} X(\Omega).\end{aligned}$$

### Traslazione in Frequenza

Dato  $\mathcal{F}_d \{x(n)\} = X(\Omega)$ , calcoliamo la trasformata di  $e^{i\Omega_0 n} x(n)$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_d \{e^{i\Omega_0 n} x(n)\} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{i\Omega_0 n} e^{-i\Omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-i(\Omega - \Omega_0)n} \\ &= X(\Omega - \Omega_0),\end{aligned}$$

da cui:

$$e^{i\Omega_0 n} x(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}_d} X(\Omega - \Omega_0).$$

### Teorema di Convoluzione

Supponiamo che

$$x(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}_d} X(\Omega) \quad \text{e} \quad y(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}_d} Y(\Omega).$$

La convoluzione tra i due segnali è espressa come:

$$x(n) * y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)y(n - k).$$

Allora:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_d \{x(n) * y(n)\} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)y(n - k) \right] e^{-i\Omega n} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n - k)e^{-i\Omega n} \quad (\text{scambiando le somme}) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)e^{-i\Omega k} \cdot Y(\Omega) \quad (\text{per la prop. di trasl. temporale}) \\ &= X(\Omega)Y(\Omega),\end{aligned}$$

ricavando la nota coppia trasformata/antitrasformata

$$x(n) * y(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}_d} X(\Omega)Y(\Omega).$$

Come vedremo di seguito, con l'aiuto di algoritmi veloci per il calcolo (anche se approssimato) della trasformata, il teorema di convoluzione suggerisce che lo studio della relazione ingresso-uscita di sistemi LTI può essere convenientemente effettuato nel dominio delle frequenze (attraverso l'uso della trasformata e antitrasformata) piuttosto che nel dominio del tempo mediante l'innaturale e complessa operazione di convoluzione. Il vantaggio dato dunque da tali trasformazioni è quello di una effettiva "algebrizzazione" del processo di analisi del comportamento del sistema.

### 5.3 Trasformata Discreta di Fourier (DFT)

La trasformata di Fourier a tempo discreto è applicabile a segnali campionati; tali segnali sono a tempo discreto e con frequenza normalizzata nel continuo  $[0, 2\pi)$ . Per poter trattare opportune approssimazioni di tali segnali con tecniche digitali, dobbiamo ulteriormente:

1. considerare solo un numero finito di campioni nel tempo;
2. effettuare un campionamento anche in frequenza, così da considerare solo un numero finito di frequenze anziché l'intervallo continuo  $[0, 2\pi)$ .

Per quanto riguarda il primo punto, l'obiettivo che ci si è posto può essere raggiunto approssimando l'informazione contenuta in un segnale  $f(t)$  con quella ottenuta dal vettore  $x$  formato da  $N$  campioni del segnale campionato con passo  $\tau$ :

$$x = [x(0), \dots, x(N-1)], \quad \text{con} \quad x(n) = f(n\tau), \quad n = 0, \dots, N-1.$$

Il vettore  $x$  "cattura" quindi l'informazione del segnale contenuta nell'intervallo temporale  $[0, (N-1)\tau]$ ;

Il secondo punto prevede di considerare il vettore  $X$  formato da  $N$  campioni della trasformata a tempo discreto  $X(\Omega)$ , campionata a intervalli di ampiezza  $\frac{2\pi}{N}$ :

$$X = [X(0), \dots, X(N-1)], \quad \text{con} \quad X(k) = X\left(\frac{2\pi}{N}k\right), \quad k = 0, \dots, N-1,$$

dove, con abuso di notazione, abbiamo denotato con la stessa variabile il vettore  $X(k)$  che rappresenta la DFT e la funzione complessa che rappresenta la trasformata di Fourier a tempo discreto  $X(\Omega)$ .

Sotto l'ipotesi che l'energia del segnale sia essenzialmente contenuta negli  $N$  campioni  $x(0), \dots, x(N-1)$  vale che:

$$X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} \approx \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} = X(k).$$

Possiamo pertanto approssimare la trasformata di Fourier con la seguente trasformazione tra vettori complessi  $N$ -dimensionali:

**Definizione 5.1.** La trasformazione  $\mathcal{F}_{DFT} : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$  che associa al vettore  $x(n)$ , con  $n = 0, \dots, N-1$ , il vettore  $X(k)$ , con  $k = 0, \dots, N-1$  nel seguente modo:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k = 0, \dots, N-1.$$

è detta Trasformata Discreta di Fourier (DFT).

La trasformazione  $\mathcal{F}_{\text{DFT}}$  è lineare e invertibile e la sua inversa  $\mathcal{F}_{\text{DFT}}^{-1}$ , detta antitrasformata, è data da:

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{i\frac{2\pi}{N}kn}, \quad n = 0, \dots, N-1.$$

Questo risultato può essere dimostrato a partire dall'identità:

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} = \begin{cases} N, & \text{se } n = 0 \\ 0, & \text{se } n \neq 0 \end{cases}$$

Infatti:

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} = \begin{cases} \sum_{k=0}^{N-1} 1 = N & \text{se } n = 0 \\ \sum_{k=0}^{N-1} \left( e^{-i\frac{2\pi}{N}n} \right)^k = \frac{\left( e^{-i\frac{2\pi}{N}n} \right)^N - 1}{e^{-i\frac{2\pi}{N}n} - 1} = 0 & \text{se } n \neq 0. \end{cases}$$

Ora per verifica diretta abbiamo che se  $x(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{i\frac{2\pi}{N}kj}$  allora:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{i\frac{2\pi}{N}kj} &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} e^{i\frac{2\pi}{N}kj} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \sum_{k=0}^{N-1} e^{-i\frac{2\pi}{N}k(n-j)} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot \begin{cases} N, & \text{se } n = j \\ 0, & \text{se } n \neq j \end{cases} \\ &= \frac{1}{N} \cdot Nx(j) = x(j). \end{aligned}$$

In conclusione la coppia trasformata-antitrasformata discreta di Fourier è riassunta di seguito, per  $k = 0, \dots, N-1$  e  $n = 0, \dots, N-1$ :

$$\boxed{X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}, \quad x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{i\frac{2\pi}{N}kn}.} \quad (5.7)$$

### 5.3.1 Proprietà della DFT

Nello spazio dei vettori a  $N$  componenti complesse si possono introdurre alcune importanti operazioni:

Prodotto:  $(f \cdot g)(n) = f(n) \cdot g(n),$

Traslazione ciclica:  $(\text{Shift}_a f)(n) = f(\langle n - a \rangle_N),$

Convoluzione Ciclica:  $(f \otimes g)(n) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) \cdot g(\langle n - k \rangle_N),$

dove con  $\langle s \rangle_N$  si intende il resto della divisione intera di  $s$  con  $N$  e il simbolo  $\otimes$  denota la convoluzione ciclica.

Queste operazioni hanno forti analogie con le operazioni su funzioni a variabile complessa che abbiamo precedentemente introdotto; non stupisce allora che la trasformata

Tabella 5.1 Proprietà della Trasformata Discreta di Fourier.

Proprietà	$\mathbf{x}(n)$	$\leftrightarrow$	$\mathbf{X}(k)$
Linearità	$ax(n) + by(n)$		$aX(k) + bY(k)$
Traslazione ciclica	$x(\langle k - a \rangle_N)$		$e^{-i2\pi an} F(n)$
Convoluzione ciclica	$x(n) \otimes y(n)$		$X(k)Y(k)$

discreta goda di proprietà simili a quelle della trasformata continua. In Tabella 5.1, in cui denotiamo con  $X(k)$  la trasformata di Fourier di  $x(n)$  e con  $Y(k)$  la trasformata di Fourier di  $y(n)$ , elenchiamo le principali proprietà.

Delle proprietà sopra elencate, dimostriamo qui l'importante proprietà di convoluzione ciclica, che asserisce che la trasformata di una convoluzione ciclica è il prodotto, componente per componente, delle trasformate.

Sia  $h = x \otimes y$  e  $H(k)$  la sua trasformata discreta di Fourier. Per definizione di convoluzione ciclica e di trasformata discreta abbiamo:

$$H(k) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} \left( \sum_{j=0}^{N-1} x(j) \cdot y(\langle n - j \rangle_N) \right) e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} \quad k = 0, \dots, N-1.$$

Osservando che

$$e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} = e^{-i\frac{2\pi}{N}kj} \cdot e^{-i\frac{2\pi}{N}k(n-j)},$$

possiamo scrivere:

$$H(k) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j) e^{-i\frac{2\pi}{N}kj} \left( \sum_{n=0}^{N-1} y(\langle n - j \rangle_N) e^{-i\frac{2\pi}{N}k(n-j)} \right) \quad k = 0, \dots, N-1.$$

Se poniamo  $n - j = s$ , quando si verifica  $0 \leq n \leq N - 1$  allora  $\langle s \rangle_N$  varia in  $\{0, 1, \dots, N - 1\}$ , e

$$e^{-i\frac{2\pi}{N}k(n-j)} = e^{-i\frac{2\pi}{N}ks}.$$

Possiamo concludere che

$$H(k) = \sum_{j=0}^{N-1} f(j) e^{-i\frac{2\pi}{N}kj} \sum_{s=0}^{N-1} g(s) e^{-i\frac{2\pi}{N}ks} = F(k)G(k) \quad k = 0, \dots, N-1.$$

Ricordiamo infine che per la trasformata discreta di Fourier vale l'analogo della relazione di Parseval (vedi la (2.17)):

$$\sum_{k=0}^{N-1} |f(k)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |F(n)|^2.$$

## 5.4 Calcolo Veloce della Trasformata Discreta: Algoritmo FFT

La principale ragione che rende importante la DFT è l'esistenza di algoritmi veloci per il suo calcolo; essi adottano la tecnica divide-et-impera che consiste nella decomposizione ricorsiva della DFT in trasformate di dimensioni ridotte ogni volta della metà. Presentiamo qui l'idea base quando la dimensione della DFT  $N$  è una potenza di 2.

La DFT richiede di moltiplicare un vettore a  $N$  componenti  $[x(0), \dots, x(N-1)]$  per la matrice  $N \times N$  la cui componente alla riga  $n$  e colonna  $k$  è:

$$W_N^{kn} = e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}.$$

Tale calcolo può essere ovviamente effettuato con  $O(N^2)$  operazioni di somma e prodotto, poichè il calcolo di ognuna delle  $N$  componenti  $X(k)$  richiede  $O(N)$  operazioni. Algoritmi più efficienti per il calcolo della trasformata sono stati proposti tra gli altri da Runge e König nel 1924 e da Cooley e Tukey nel 1965. Questi algoritmi richiedono  $O(N \log N)$  invece di  $O(N^2)$  operazioni e per tal motivo sono chiamati algoritmi FFT (*Fast Fourier Transform*).

Secondo la notazione qui introdotta, la trasformata discreta può essere scritta come:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn}, \quad k = 0, \dots, N-1. \quad (5.8)$$

Separando nella sommatoria i termini di indice pari da quelli di indice dispari, si ottiene:

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n \text{ pari}} x(n)W_N^{kn} + \sum_{n \text{ dispari}} x(n)W_N^{kn} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n)W_N^{k2n} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1)W_N^{k(2n+1)}. \end{aligned}$$

Poichè vale  $W_N^2 = W_{N/2}$ , si ha:

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n)W_{N/2}^{kn} + W_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1)W_{N/2}^{kn} \\ &= X_1(k) + W_N^k X_2(k), \quad k = 0, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Dato che le sequenze  $X_1(k)$  e  $X_2(k)$  sono periodiche di periodo  $N/2$ , cioè  $X_1(k+N/2) = X_1(k)$  e  $X_2(k+N/2) = X_2(k)$  e, siccome vale che  $W_N^{k+N/2} = -W_N^k$ , possiamo riscrivere la  $X(k)$  come:

$$\begin{aligned} X(k) &= X_1(k) + W_N^k X_2(k), \quad k = 0, \dots, \frac{N}{2} - 1, \\ X(k + \frac{N}{2}) &= X_1(k) - W_N^k X_2(k), \quad k = 0, \dots, \frac{N}{2} - 1. \end{aligned}$$

Osserviamo che il calcolo di  $X_1(k)$ , così come di  $X_2(k)$ , richiede  $(N/2)^2$  moltiplicazioni di due numeri complessi; il numero di moltiplicazioni richieste per  $W_N^k X_2(k)$  è invece  $N/2$ . Complessivamente, per calcolare  $X(k)$  occorrono  $2(N/2)^2 + N/2 = N^2/2 + N/2$  moltiplicazioni, che rappresenta una riduzione di un fattore 2 circa (per  $N$  grande) rispetto alle  $N^2$  operazioni richieste per il calcolo della 5.8. Se operiamo ricorsivamente secondo la strategia appena illustrata, dimezziamo la complessità ad ogni passo di ricorsione dimezzando al

contempo la lunghezza della sequenza numerica su cui si opera. Così facendo, se  $N = 2^l$ , quando la sequenza di ingresso si riduce ad un solo campione la procedura ricorsiva è stata invocata  $l = \log_2 N$  volte.

In Algoritmo 1 viene mostrata l'implementazione in pseudocodice di detta procedura.

---

**Algoritmo 1**


---

```

procedure FFT ( $[y(0), \dots, y(N-1)]$ )
  if  $N = 1$  then
     $Y(0) \leftarrow y(0)$ 
    return  $[Y(0)]$ 
  else
     $[p(0), p(1) \dots, p(\frac{N}{2} - 1)] \leftarrow \text{FFT}([y(0), y(2) \dots, y(N-2)])$ 
     $[d(0), d(1) \dots, d(\frac{N}{2} - 1)] \leftarrow \text{FFT}([y(1), y(3) \dots, y(N-1)])$ 
    for  $k = 0$  to  $N - 1$  do
       $Y(k) \leftarrow p(\langle k \rangle_{\frac{N}{2}}) + W_N^k d(\langle k \rangle_{\frac{N}{2}});$ 
    end for
  end if
  return  $[Y(0), \dots, Y(N-1)]$ 

```

---

Il calcolo della trasformata di un vettore a  $N$  componenti richiama ricorsivamente il calcolo della trasformata di 2 vettori a  $N/2$  componenti con  $O(N)$  operazioni di somma e prodotto aggiuntive. Detto  $T(N)$  il numero totale di operazioni per calcolare la trasformata di un vettore a  $N$  componenti, vale allora:

$$T(N) = \begin{cases} 0 & \text{se } N = 1, \\ 2T(N/2) + O(N) & \text{se } N > 1. \end{cases}$$

Poiché la soluzione alla precedente equazione di ricorrenza è  $T(N) = O(N \log N)$ , l'algoritmo FFT permette una forte riduzione della complessità in tempo per il calcolo della trasformata. In particolare, l'analisi esposta sopra mostra che il calcolo della FFT richiede esattamente  $(N/2) \log_2 N$  moltiplicazioni di numeri complessi.

L' algoritmo veloce per il calcolo della trasformata inversa è del tutto simile.

## 5.5 Applicazioni della Trasformata Discreta di Fourier

Nell'elaborazione dei segnali, la FFT ha tre principali settori di utilizzo:

1. analisi spettrale di segnali analogici e digitali, con applicazioni alla sintesi di filtri digitali;
2. calcolo veloce della convoluzione e della correlazione;
3. compressione di dati per la memorizzazione e la trasmissione efficiente degli stessi.

Per quanto riguarda la relazione tra la trasformata di Fourier  $F(\omega)$  e la trasformata discreta di Fourier, se le varie approssimazioni fatte (passo di campionamento  $\tau$ , numero  $N$  di campioni) risultano ragionevolmente buone, allora:

$$x(n) = f(n\tau), \quad n = 0, \dots, N-1$$

implica che

$$X(k) \approx F\left(\frac{2\pi k}{N\tau}\right), \quad k = 0, \dots, N-1.$$

Queste approssimazioni risultano accettabili quando l'intervallo di campionamento in un dominio (per esempio il tempo) consente di avere un aliasing trascurabile nell'altro dominio (frequenza).

Si hanno essenzialmente tre situazioni distinte:

1. segnali periodici (tempo) a banda limitata (frequenza): questa è l'unica classe di segnali per cui la trasformata discreta e quella continua coincidono (a meno di un fattore di scala);
2. segnali di durata limitata (tempo), cioè non nulli in un intervallo temporale finito: tali segnali non sono banda limitata (frequenza), per cui il campionamento produce aliasing che si può solamente ridurre ad un valore accettabile ma non eliminare. La trasformata discreta differisce pertanto da quella continua a causa di errori introdotti dall'aliasing.
3. segnali di durata non limitata, cioè a supporto temporale di dimensione infinita e non a banda limitata (frequenza): la trasformata discreta differisce da quella continua a causa di errori sia di aliasing che di troncamento.

Giustificiamo, mediante una trattazione qualitativa, le precedenti affermazioni che mettono in luce le condizioni sotto le quali la DFT permette di calcolare in modo approssimato la trasformata di Fourier  $F(\omega)$  di un segnale  $f(t)$ .

A tal riguardo, supponiamo che, come illustrato in Figura 5.6:

1. per un opportuno  $\tau$ , sia  $F(\omega) \approx 0$  per  $|\omega| > \frac{\pi}{\tau}$ ;
2. per un opportuno  $T$ , sia  $f(t) \approx 0$  se  $t < 0$  o  $t > T$ .

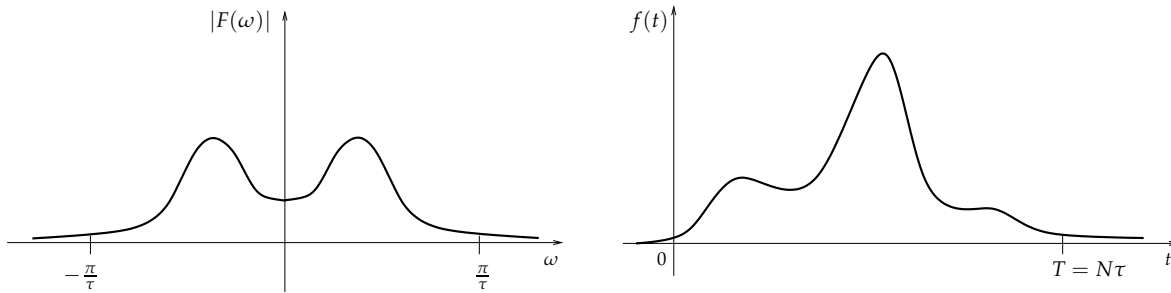


Figura 5.6 Localizzazione in tempo e frequenza di un segnale.

Per l'ipotesi 1, il segnale  $f(t)$  è essenzialmente individuato dal suo campionamento  $x(n) = f(n\tau)$  con periodo  $\tau$ . Posto ora  $N = T/\tau$ , per l'ipotesi 2 possiamo concludere che  $f(t)$  è essenzialmente individuato dal vettore  $[x(0), \dots, x(N-1)]$ .

Sotto le ipotesi date, vale che:

$$F(\omega) \approx \tau \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-i\omega n} \quad (5.9)$$



Infatti:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \\ &\approx f(t) \int_0^{N\tau} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (\text{per ipotesi 1}) \\ &\approx \sum_{n=0}^{N-1} f(n\tau)\tau e^{-i\omega n\tau} \quad (\text{approssimando l'integrale con la somma}). \end{aligned}$$

La DFT del vettore  $[x(0), \dots, x(N-1)]$  è il vettore  $[X(0), \dots, X(N-1)]$  dove:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} \quad (5.10)$$

Dalla (5.9) e dalla (5.10) segue allora:

$$F\left(\frac{2\pi}{N}k\right) \approx \tau X(k) \quad (5.11)$$

La (5.11) permette di approssimare la trasformata di Fourier continua mediante il calcolo della DFT.

Altre applicazioni della DFT sono legate alla simulazione di sistemi LTI mediante una tecnica di calcolo veloce della convoluzione basata sulla FFT, e all'uso della trasformata coseno, che consiste essenzialmente nella parte reale della DFT, per la compressione di segnali.

### Convoluzione e Correlazione

Sia  $S$  un sistema LTI per segnali a tempo discreto. Sappiamo che  $S$  è individuato dalla sua risposta  $h(n)$  all'impulso, ed in particolare che la risposta  $y(n)$  al segnale  $x(n)$  è data dalla convoluzione  $h * x$ :

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k).$$

La convoluzione è dunque centrale nello studio dei sistemi LTI; tra le operazioni ad essa riferite ricordiamo ad esempio la identificazione di sistema (dati un segnale-test  $x$  e la risposta  $y$ , determinare la risposta all'impulso  $h$ ), di deconvoluzione (data l'uscita  $y$  e la risposta  $h$  all'impulso, determinare l'ingresso  $x$ ), la deconvoluzione cieca (stimare l'ingresso  $x$  conoscendo solo l'uscita  $y$ !).

Consideriamo ora segnali a tempo discreto  $x(n)$  in un arco temporale finito, per esempio nulli prima di 0 e dopo  $N-1$ ; essi possono quindi essere descritti da un vettore  $[x(0), \dots, x(N-1)]$ . La convoluzione tra  $x$  e  $h$  è data dal vettore  $y$  a  $2N$  componenti dove:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k) \quad (0 \leq n \leq 2N-1).$$

Un'altra operazione tra segnali di grande interesse è la correlazione temporale, che verrà discussa in Capitolo 9. Limitatamente a segnali  $x(n)$  e  $y(n)$  nulli prima di 0 e dopo  $N-1$ , la loro cross-correlazione temporale  $R_{xy}(j)$  è:

$$R_{xy}(j) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)y(k+j) \quad (-N+1 \leq j \leq N-1).$$

Sia ora  $z(n) = y(N - 1 - n)$ , cioè  $z$  è il vettore ottenuto leggendo  $y$  in ordine inverso. Si verifica facilmente:

$$R_{xy}(N - 1 - j) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)z(j - k) \quad (0 \leq j \leq 2N - 1).$$

Essendo l'inverso della correlazione di due vettori la convoluzione di un vettore per l'inverso dell'altro, il calcolo della correlazione è riducibile a quello della convoluzione.

Studiamo ora il problema di determinare algoritmi efficienti per il calcolo della convoluzione. Si tratta di progettare algoritmi che, avendo in ingresso due vettori  $[x(0), \dots, x(N - 1)]$  e  $[y(0), \dots, y(N - 1)]$  diano in uscita il vettore  $2N$ -dimensionale  $[z(0), \dots, z(N - 1)]$  con:

$$z(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)y(n - k) \quad (0 \leq n \leq 2N - 1).$$

Le prestazioni degli algoritmi saranno misurate dal numero di moltiplicazioni richieste.

L'algoritmo che implementa direttamente la formula, richiede per il calcolo di  $z(n)$   $n + 1$  prodotti se  $0 \leq n \leq N - 1$ , oppure  $2N - n + 1$  prodotti se  $n > N - 1$ . Il numero totale di prodotti è allora  $N^2 + N$ .

Osserviamo ora che  $z$  è la convoluzione ciclica dei 2 vettori  $2N$ -dimensionali  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  ottenuti aggiungendo  $N$  zeri ai 2 vettori  $N$ -dimensionali  $x$  e  $y$ , come segue:

$$\begin{aligned} \hat{x} &= [x(0), \dots, x(N - 1), 0, \dots, 0], \\ \hat{y} &= [y(0), \dots, y(N - 1), 0, \dots, 0], \end{aligned}$$

quindi

$$z = \hat{x} * \hat{y}.$$

Indicando con  $\mathcal{F}_d$  e  $\mathcal{F}_d^{-1}$  rispettivamente la trasformata e l'antitrasformata discreta di Fourier, a causa della proprietà della convoluzione ciclica, si ha:

$$z = \mathcal{F}_d^{-1} \{ \mathcal{F}_d \{ z \} \} = \mathcal{F}_d^{-1} \{ \mathcal{F}_d \{ \hat{x} * \hat{y} \} \} = \mathcal{F}_d^{-1} \{ \mathcal{F}_d \{ \hat{x} \} \mathcal{F}_d \{ \hat{y} \} \}.$$

L'algoritmo precedente calcola la convoluzione applicando tre volte l'algoritmo FFT a vettori di dimensione  $2N$  ed eseguendo  $2N$  ulteriori moltiplicazioni complesse, per un totale di  $3N \log_2 2N + 2N$  moltiplicazioni complesse.

Poiché una moltiplicazione complessa richiede a sua volta 4 moltiplicazioni, concludiamo che l'algoritmo calcola la convoluzione di 2 vettori  $N$ -dimensionali con  $12N \log_2 2N + 8N$  moltiplicazioni, contro le  $N(N + 1)$  moltiplicazioni richieste dal metodo diretto.

### Trasformata Coseno e Compressione Dati

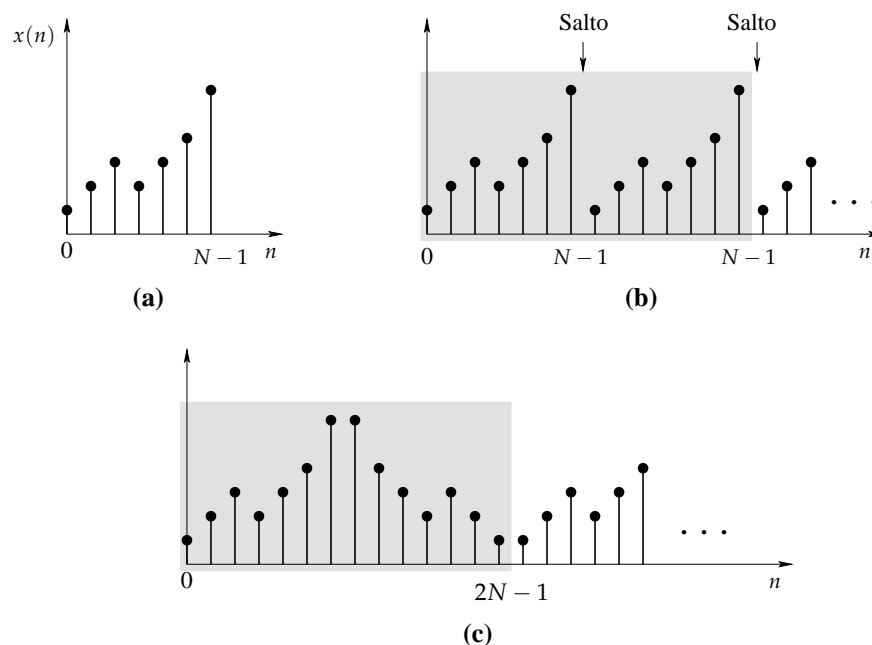
La compressione dei dati è una problematica di grande interesse con applicazione, ad esempio, nella trasmissione di segnali audio e video o per la memorizzazione di segnali biomedici. I dati compressi presentano in generale due vantaggi:

1. possono essere trasmessi a velocità più elevata;
2. applicando ad essi algoritmi per il riconoscimento di caratteristiche, si hanno tempi di risposta più contenuti.

Allo scopo di chiarire il concetto di compressione, ricordiamo che un segnale discretizzato può essere visto come un vettore monodimensionale (segnale temporale) o bidimensionale (immagine) a  $N$  componenti. In questo contesto, l'operazione di compressione può essere descritta mediante una trasformazione  $M : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ , con  $M < N$ . Poiché dal segnale compresso  $y = M(x)$  non è in generale possibile ricostruire univocamente il segnale originale  $x$ , un parametro importante della compressione è l'errore di ricostruzione.

Data una famiglia di segnali, l'operatore di compressione che, tra le trasformazioni lineari, minimizza l'errore quadratico di ricostruzione è ottenibile dalla cosiddetta *trasformata di Karhunen-Loève*, descritta per esempio in [DeOb97]. Essa associa ad ogni vettore  $[x(0), \dots, x(N-1)]$  un vettore  $[K(0), \dots, K(N-1)]$  tale che la "informazione" contenuta in  $K(j)$  è maggiore di quella contenuta in  $K(j+1)$ , con  $j = 0, \dots, N-2$ : la compressione ottima di  $[x(0), \dots, x(N-1)]$  in un vettore ad  $M$  componenti è il vettore  $[K(0), \dots, K(M-1)]$ .

Questa tecnica, detta *analisi delle componenti principali*, richiede tuttavia di conoscere la distribuzione dei segnali ed è computazionalmente costosa. Se tuttavia ipotizziamo di trattare segnali con spettro concentrato sulle basse frequenze, un risultato simile alla trasformata di Karhunen-Loève può essere ottenuto applicando la DFT; un inconveniente di questa scelta sta nel fatto che la DFT tratta il segnale  $[x(0), \dots, x(N-1)]$  come segnale periodico  $[x(0), \dots, x(N-1), x(0), \dots]$ , introducendo "salti" fittizi (vedi Figura 5.7(b)) che comportano la presenza di alte frequenze.



**Figura 5.7** (a) Segnale finito. (b) Segnale reso periodico. (c) Segnale ripetuto specularmente.

Allo scopo di moderare i salti, il segnale può essere ripetuto in modo speculare come in Figura 5.7(c), ottenendo il nuovo segnale  $[z(0), \dots, z(2N-1)]$  con:

$$z(k) = \begin{cases} x(k), & \text{se } 0 \leq k \leq N-1 \\ x(N-1-k), & \text{se } N \leq k \leq 2N-1. \end{cases}$$

Il segnale  $z$  contiene ovviamente la stessa informazione del segnale  $x$ . Applicando la DFT a  $z$  e ricordando che  $z = [x(0), \dots, x(N-1), x(N-1), \dots, x(0)]$ , si ottiene per  $k = 0, \dots, 2N-1$ :

$$\begin{aligned} Z(k) &= \sum_{n=0}^{2N-1} x(n) e^{-i\frac{2\pi nk}{2N}} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \left[ e^{-i\frac{2\pi nk}{2N}} + e^{-i\frac{2\pi(2N-n-1)k}{2N}} \right] \quad (\text{per la simmetria di } z) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} 2x(n) \frac{e^{-i\frac{\pi k}{2N}(2n+1)} + e^{i\frac{\pi k}{2N}(2n+1)}}{2} e^{i\frac{\pi k}{2N}} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} 2x(n) \cos\left(\frac{\pi k}{2N}(2n+1)\right) e^{i\frac{\pi k}{2N}} \end{aligned}$$

Ponendo  $X_c(k) = NZ(k)e^{-i\frac{\pi k}{2N}}$  e considerando le prime  $N$  componenti, si ottiene la trasformazione:

$$X_c(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} 2x(n) \cos\left(\frac{\pi k}{2N}(2n+1)\right) \quad (0 \leq k \leq N-1).$$

Questa trasformazione viene chiamata *Trasformata Discreta Coseno* (DCT). Come abbiamo visto, essa può essere calcolata direttamente mediante la FFT; sono stati comunque implementati algoritmi per il calcolo della DCT che richiedono ancora meno moltiplicazioni.

Per quanto riguarda l'inversa della DCT, è possibile provare che:

$$x(n) = \frac{X_c(0)}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} X_c(k) \cos\left(\frac{\pi k}{2N}(2n+1)\right) \quad (0 \leq n \leq N-1).$$

### Esempio 5.5.1.

*Compressione nello standard JPEG.*

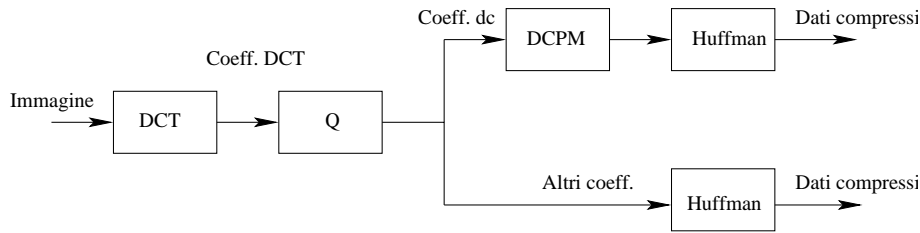
Una immagine rettangolare digitalizzata è rappresentata da una matrice  $N \times M$  di pixel (picture element)  $s(j, k)$ , valori numerici che denotano attributi dell'immagine come intensità o colore. Le immagini occupano parecchia memoria; per esempio, una immagine a colori di  $320 \times 240$  pixel, ognuno dei quali contiene le intensità dei tre colori fondamentali (rosso, giallo, verde) per 1 byte l'uno, occupa  $320 \times 240 \times 3 = 230$  kbyte, equivalenti a circa 75 pagine di testo.

La gestione di immagini richiede dunque efficienti algoritmi di compressione: presentiamo qui schematicamente l'algoritmo di compressione raccomandato nello standard JPEG (Joint Photographic Experts Group). Ricordiamo che la standardizzazione è necessaria per permettere lo scambio di immagini tra differenti applicazioni, supportate ad esempio da Personal Computer, Reti, CD ROM, macchine fotografiche digitali.

L'algoritmo di compressione in JPEG, illustrato in Figura 5.8, prevede i seguenti passi descritti schematicamente.

**Calcolo della DCT.** L'immagine viene divisa in blocchi di  $8 \times 8$  pixel e di ogni blocco viene calcolata la trasformata coseno bidimensionale:

$$S(i, l) = \frac{1}{4} C(i) C(l) \sum_{j=0}^7 \sum_{k=0}^7 s(j, k) \cos((2j+1)i\pi/16) \cos((2k+1)l\pi/16),$$



DCT = Trasformata Discreta Coseno

Q = Quantizzatore

DCPM = Differential Pulse Code Modulation

Huffman = Codice di Huffman

Figura 5.8 Compressione dati JPEG.

dove:

$$C(i) = \begin{cases} 1/\sqrt{2} & \text{se } i = 0 \\ 1 & \text{se } i \neq 0 \end{cases}$$

La trasformata viene ottenuta calcolando dapprima la DCT di ogni riga, formando con i vettori ottenuti una nuova matrice e calcolando infine la DCT di ogni colonna. Si osservi che ogni matrice  $8 \times 8$  così ottenuta contiene in alto a sinistra le ampiezze delle basse frequenze e in basso a destra le ampiezze delle alte frequenze.

**Quantizzazione dei coefficienti.** Per ogni blocco, ognuna delle 64 componenti viene quantizzata con un quantizzatore uniforme e arrotondata con un intero; questa procedura crea matrici a componenti intere con molti zeri in basso a destra.

**Codifica.** Per ogni blocco, il coefficiente in alto a sinistra  $S(0,0)$  è il termine *dc* e rappresenta la ampiezza media del segnale nella matrice. Mediamente blocchi adiacenti hanno valori simili del termine *dc*, pertanto è conveniente trattare questo coefficiente in modo differente dai rimanenti 63. I termini *dc* vengono convenientemente precompressi utilizzando la DPCM (Differential Pulse Code Modulation), un'estensione della Delta-modulazione analizzata in Sezione 4.5. Tutti gli altri coefficienti sono ordinati a zig-zag (vedi Figura 5.9) e codificati con l'algoritmo di Huffman, che permette di ottenere il codice prefisso avente lunghezza media di codifica minima.

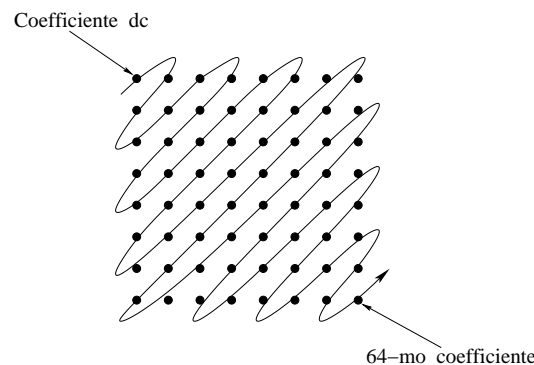


Figura 5.9 Ordine a zig-zag.

La decodifica avviene semplicemente invertendo le operazioni di codifica. Questo tipo di codifica permette tassi di compressione fino a 20:1.

**Esempio 5.5.2.** 

---

Si considerino immagini di  $1024 \times 1024$  pixel con 256 livelli di grigio. Determinare il tasso di trasmissione necessario a trasmettere un flusso di 25 immagini al secondo, compresse con un fattore 20 (si trascuri il tempo necessario a comprimere e decomprimere l'immagine). Ogni pixel richiede  $\log_2 256 = 8$  bit, cioè 1 byte. Ogni immagine compressa consiste di  $1024 \times 1024 \times 1/20 = 50$  Kbyte. Il tasso di trasmissione dovrà essere  $50 \times 25$  kbyte/sec, cioè 1.25 Mbyte/sec.