

CONVERSIONE ANALOGICO-DIGITALE

I segnali del mondo reale sono analogici, mentre un elaboratore digitale è in grado di memorizzare e trattare esclusivamente sequenze finite di bit. Per trattare con tecniche digitali i segnali analogici è allora necessario, in via preliminare, approssimare quest'ultimi con segnali digitali. I sistemi che trasformano un segnale analogico nel corrispondente digitale sono detti *convertitori analogico-digitali* (ADC), mentre quelli che realizzano l'operazione inversa, ossia trasformare un segnale digitale in un segnale analogico, sono detti *convertitori digitali-analogici* (DAC).

I principi di base che sovrintendono detto processo di conversione sono quelli espressi dalle operazioni di *campionamento* e di *quantizzazione*.

Al campionamento è dedicato il primo paragrafo. Un sistema che realizza l'operazione di campionamento viene chiamato *campionatore*. Campionare un segnale a tempo continuo significa rilevare le ampiezze del segnale su un insieme discreto di tempi: i "frames" catturati da una telecamera che inquadra una scena reale, ne costituiscono un esempio. Viene qui discusso il fondamentale teorema del campionamento: un segnale a banda limitata da W Hz può essere perfettamente ricostruito dai suoi campioni presi con una frequenza di almeno $2W$ Hz; viene inoltre sommariamente descritto il fenomeno dell'*equivocazione* (*aliasing*), che si verifica quando la frequenza di campionamento è inferiore a $2W$.

La quantizzazione permette di trasformare un segnale a valori continui in un segnale a valori su un insieme finito. Questa operazione in generale introduce un errore irreversibile nel segnale quantizzato: dato il segnale quantizzato, non è in generale possibile

ricostruire il segnale originale. È tuttavia possibile controllare come il segnale quantizzato risulti una buona approssimazione di quello analogico: un tipico indice di qualità è il *rapporto segnale-rumore* SQNR. I sistemi che realizzano l'operazione di quantizzazione sono chiamati *quantizzatori*: nel secondo paragrafo viene introdotto e studiato il quantizzatore uniforme a n bit, mostrando in particolare che ogni bit aggiunto al quantizzatore comporta un miglioramento di 6 dB nel rapporto segnale-rumore. Successivamente si motivano e si introducono modelli di quantizzatori non uniformi.

Un segnale di durata limitata nel tempo, campionato e quantizzato, può essere trattato con tecniche digitali: nel terzo paragrafo vengono studiati i principali sistemi di conversione analogico-digitale (ADC) e digitale-analogico (DAC), che costituiscono il "ponte" tra il mondo analogico e l'elaboratore digitale. Viene in particolare discussa la tecnica di sovracampionamento, che permette di migliorare il rapporto segnale-rumore ed una sua importante applicazione: il convertitore a 1 bit basato sulla sigma-delta modulazione. Viene infine analizzato il comportamento di un convertitore digitale-analogico di ordine 0 (ZOH).

Il capitolo termina con una discussione sulle codifiche del livello di quantizzazione, che consente di trasformare il segnale in una sequenza binaria. Vengono infine presentate alcune codifiche, utili ai fini della trasmissione, di sequenze binarie in termini di segnali a tempo continuo composti da rettangoli.

4.1 Campionamento

Campionare un segnale a tempo continuo significa rilevare le ampiezze del segnale su un insieme discreto di tempi. Ad esempio, fissato un intervallo di tempo di ampiezza τ , un campionamento uniforme con periodo τ di un segnale $f(t)$ corrisponde all'osservazione del segnale ai tempi $n\tau$ ($-\infty < n < \infty$); il segnale campionato può essere interpretato come il segnale a tempo discreto $f(n\tau)$.

Il sistema *campionatore uniforme* con frequenza di campionamento $\nu_s = 1/\tau$, trasforma quindi un segnale a tempo continuo $f(t)$ nel segnale a tempo discreto $f(n\tau)$, come mostrato in Figura 4.1. Si osservi che il sistema campionatore è un sistema lineare.

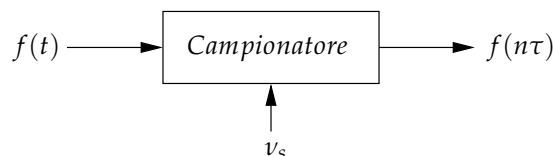


Figura 4.1 Sistema campionatore uniforme con periodo di campionamento $\tau = 1/\nu_s$.

Campionamento Ideale

Il *campionamento ideale* è assimilabile ad un processo di modulazione in cui il segnale portante è definito dal treno di impulsi di Dirac

$$\delta_\tau(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\tau).$$

Il segnale modulato, denotato con $f_s(t)$, risulta essere pertanto

$$f_s(t) = f(t)\delta_\tau(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n\tau)\delta(t - n\tau). \quad (4.1)$$

La Figura 4.2 illustra il processo di campionamento ideale della funzione $f(t)$ modulato dal treno di impulsi.

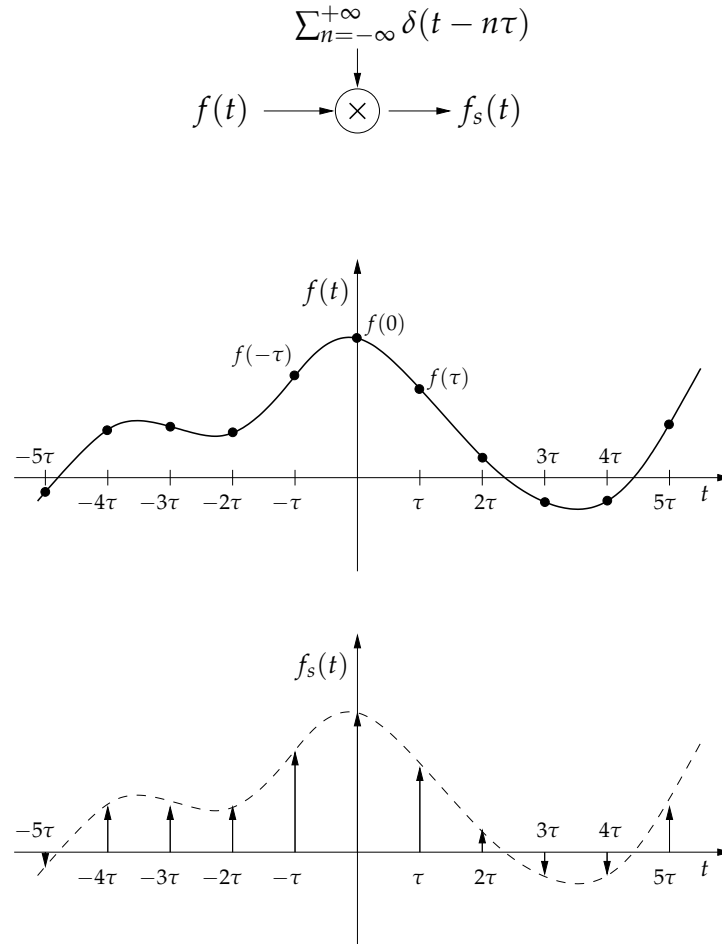


Figura 4.2 Campionamento ideale.

È utile osservare che il segnale $f_s(t)$ non risulta essere un modello per segnali reali così come il campionamento ideale non è un sistema fisicamente realizzabile; corrisponde invece ad un'operazione realizzata da sistemi campionatori reali la generazione della sequenza $f(n\tau)$ che qui rappresenta il peso delle funzioni impulsive implicate nel campionamento idealizzato. La trattazione qui esposta si basa su considerazioni ideali solo per convenienza matematica ed esigenze di chiarezza espositiva, specie se si pensa all'analisi spettrale che risulta notevolmente semplificata.

Il passaggio successivo è l'analisi nel dominio delle frequenze del sistema finora introdotto. Innanzitutto deriviamo lo spettro del treno d'impulsi impiegato nel rilevare i campioni della funzione $f(t)$. Ricordando che la trasformata di Fourier della funzione impulsiva è la costante unitaria e che la trasformata di una funzione periodica è un treno di impulsi con ampiezza data dai coefficienti della serie di Fourier associata, moltiplicati per

2π (vedi Esempio 2.5.7), si ha che:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\tau) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \omega_s \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_s),$$

dove $\omega_s = 2\pi\nu_s = \frac{2\pi}{\tau}$ è la frequenza di campionamento in rad/sec.

Teorema del Campionamento di Shannon

Il problema che si intende affrontare qui è il seguente: dato un segnale $f(t)$, stabilire con quale frequenza deve essere campionato affinché il segnale campionato $f(n\tau)$ ($-\infty < n < \infty$) contenga la stessa informazione di $f(t)$, cioè sia possibile ricostruire $f(t)$ a partire dalla sequenza $f(n\tau)$?

Per dare una risposta a questa domanda occorre passare al dominio delle frequenze e dunque alla trasformata di Fourier della (4.1).

Se denotiamo con $F_s(\omega)$ la trasformata della funzione $f_s(t)$, allora per la proprietà di dualità prodotto nel tempo/convoluzione in frequenza vale:

$$f_s(t) = f(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\tau) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} F(\omega) * \omega_s \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_s).$$

Poiché

$$\frac{1}{2\pi} F(\omega) * \omega_s \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_s) = \frac{1}{\tau} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(\omega) * \delta(\omega - n\omega_s),$$

dalla proprietà di convoluzione si ricava

$$F(\omega) * \delta(\omega - n\omega_s) = F(\omega - n\omega_s).$$

Si conclude che la trasformata di Fourier del segnale modulato dalla funzione impulsiva è

$$F_s(\omega) = \frac{1}{\tau} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(\omega - n\omega_s).$$

Dunque lo spettro del segnale campionato idealmente è costituito da repliche dello spettro di $f(t)$ traslate in frequenza di $2n\pi/\tau$ Hz e scalate in ampiezza secondo il fattore $1/\tau$.

Una relazione importante sussiste tra la frequenza di campionamento ω_s e la massima frequenza $\omega_B = 2\pi\nu_B$ presente nello spettro del segnale campionato $f(t)$. La Figura 4.3 fornisce un'interpretazione grafica di detta relazione: se il segnale $f(t)$ è a banda limitata, allora le repliche dello spettro di $f(t)$ non si sovrappongono in $F_s(\omega)$ essendo soddisfatta con un certo margine la *relazione di Nyquist*

$$\omega_s \geq 2\omega_B \text{ o equivalent. } \nu_s \geq 2\nu_B, \quad \text{ovvero} \quad \tau \leq \frac{1}{2\nu_B}.$$

Dalla stessa figura si comprende che quanto asserito è vero per un periodo di campionamento con limite inferiore $\tau_B = \frac{1}{2\nu_B}$, mentre per valori inferiori (dove la condizione di Nyquist non è verificata) si hanno inevitabilmente sovrapposizioni delle repliche spettrali.

Quanto detto sopra è asserito nel seguente

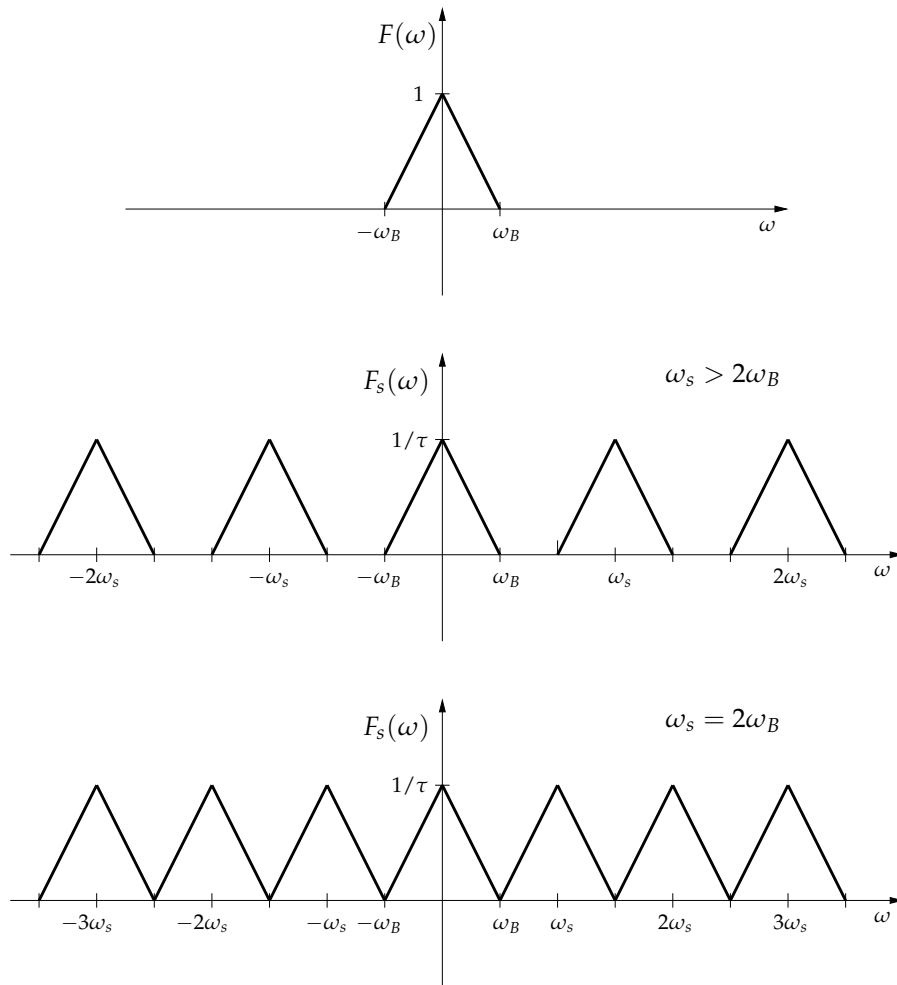


Figura 4.3 Analisi del campionamento nel dominio delle frequenze.

Teorema 4.1 (Teorema del campionamento). *Un segnale $f(t)$ a banda limitata da ν_B Hz, la cui trasformata di Fourier $F(\omega)$ è quindi nulla per $|\omega| > 2\pi\nu_B$ rad/sec, può essere univocamente ricostruito dai suoi campioni $f(n\tau)$ ($-\infty < n < \infty$) presi a frequenza $\nu_s = \frac{1}{\tau}$, se $\nu_s \geq 2\nu_B$. La frequenza $2\nu_B$ Hz è detta tasso o frequenza di Nyquist.*

Esempio 4.1.1.

Un segnale contiene componenti in frequenza inferiori a 4 kHz; determinare la minima frequenza di campionamento che ne permetta la ricostruzione priva di errore.

Basta calcolare il tasso di Nyquist $2 \times 4 = 8$ kHz.

Sotto l'ipotesi del teorema di Shannon (segnale a banda limitata da ω_B e frequenza di campionamento $\omega_s \geq 2\omega_B$), il segnale $f(t)$ può essere ricostruito dalla sua versione campionata $f_s(t)$ mediante l'applicazione di un filtro passabasso ideale avente guadagno τ e frequenza di taglio ω_c tale che:

$$\omega_B \leq \omega_c \leq \omega_s - \omega_B.$$

La Figura 4.4 illustra l'intero processo che dal campionamento ideale operato da modulazione impulsiva porta alla ricostruzione del segnale originale mediante l'applicazione di un filtro ideale con caratteristiche sopra descritte.

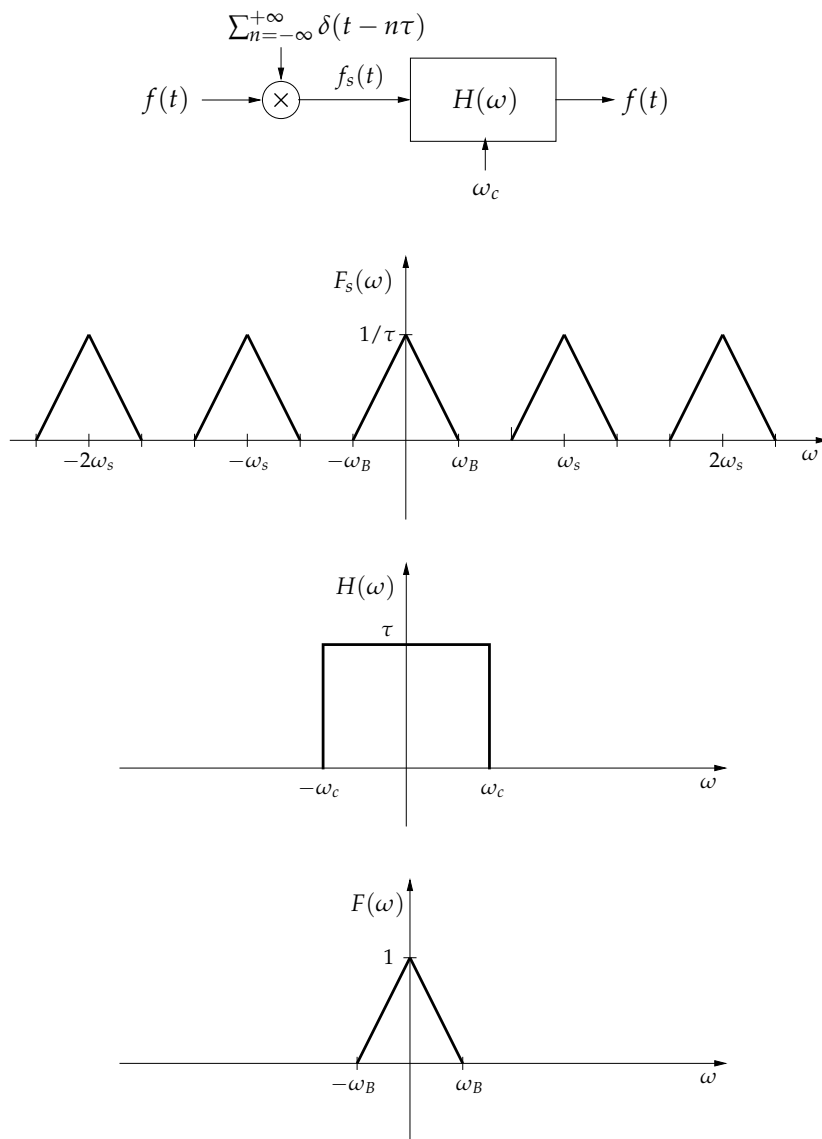


Figura 4.4 Ricostruzione del segnale dai suoi campioni e filtro ideale.

Al fine di mostrare la famiglia di funzioni che, a partire dai campioni del segnale, consentono di ottenere una perfetta ricostruzione dello stesso, ricaviamo la risposta impulsiva $h(t)$ del filtro implicato nel processo di ricostruzione, avente come spettro $H(\omega)$, frequenza di taglio $\omega_s/2$ e guadagno τ (vedi Figura 4.3). Dal capitolo precedente (Esempio 2.5.8) sappiamo che

$$\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_s t}{2}\right) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \tau \operatorname{rect}\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right).$$

Dalla relazione precedente e per la proprietà di dualità prodotto/convoluzione si ricava

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \mathcal{F}^{-1} \{H(\omega)F_s(\omega)\} = h(t) * f_s(t) \\
 &= \text{sinc} \left(\frac{\omega_s t}{2} \right) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n\tau) \delta(t - n\tau) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{sinc} \left(\frac{\omega_s t}{2} \right) * f(n\tau) \delta(t - n\tau) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n\tau) \text{sinc} \left(\frac{\omega_s (t - n\tau)}{2} \right).
 \end{aligned}$$

La formula trovata è riferita all'interpolazione ideale. Come discusso in precedenza, l'aggettivo ideale tiene conto del fatto che il filtro passabasso è ideale e di conseguenza la sua risposta all'impulso è non causale e di durata infinita; fatto questo d'altro canto ben evidente dalle funzioni interpolatrici $\text{sinc}(\cdot)$, la cui sovrapposizione ricostruisce il segnale desiderato, che sono infinitamente estese nel tempo in ambedue le direzioni: in altre parole il filtraggio di ricostruzione ideale non è fisicamente realizzabile.

Aliasing

Rimane infine da chiarire che cosa accade quando non sono soddisfatte le condizione del teorema di Shannon, cioè quando la banda del segnale è illimita oppure il segnale è a banda limitata ma la frequenza di campionamento è inferiore al tasso di Nyquist: $\nu_s < 2\nu_B$ o equivalentemente $\omega_s < 2\omega_B$. Risulta evidente che il metodo di ricostruzione sopra descritto perde la sua efficacia a causa delle sovrapposizioni che si creano nella ripetizione periodica del segnale trasformato, come mostrato in Figura 4.5. La sovrapposizione di alcune componenti in frequenza crea distorsioni irreversibili perché introduce nuove componenti non presenti nello spettro originale, rendendo impossibile il compito di ricostruzione del segnale dato ad opera del filtro passabasso ideale.

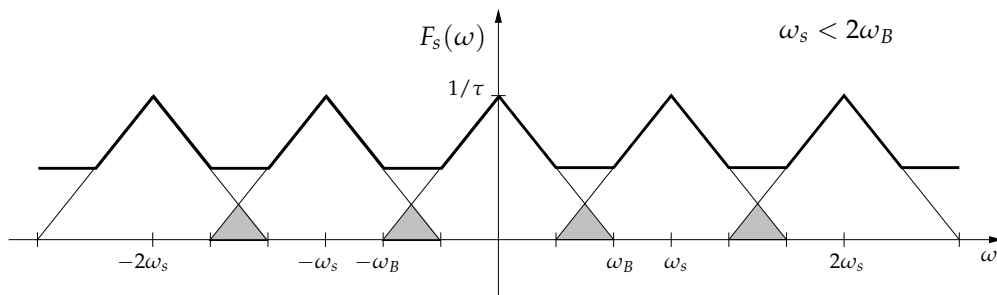


Figura 4.5 Tipica manifestazione del fenomeno dell'aliasing.

A causa di questo effetto, chiamato *equivocazione* o *aliasing*, non è in generale possibile ricostruire il segnale di partenza sulla base del segnale campionato. Per evitare questo fenomeno, un sistema campionatore a frequenza ω_s viene normalmente fatto precedere da un filtro passabasso con frequenza di taglio ω_c al più $\omega_s/2$, detto filtro anti-aliasing, come mostrato in Figura 4.6.

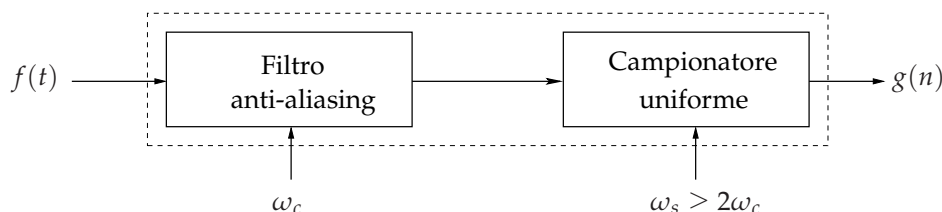


Figura 4.6 Sistema campionatore preceduto da filtro anti-aliasing.

Esempio 4.1.2.

In telefonia le più alte frequenze di interesse sono 3.4 kHz. Una conversazione può tuttavia contenere frequenze superiori ai 10 kHz. Indicare come è possibile ricostruire il segnale di interesse (cioè le componenti in frequenza inferiori a 3.4 kHz) da un suo campionamento a 8 kHz.

Una semplice soluzione consiste nel premettere a campionatore un filtro passabasso con frequenza di taglio a 3 kHz.

Caratteristiche dei Filtri Anti-Aliasing Reali

Un filtro anti-aliasing dovrebbe rimuovere tutte le componenti del segnale a frequenze superiori o uguali alla metà della frequenza di campionamento: in linea di principio questo può essere ottenuto da un filtro ideale passabasso con frequenza di taglio pari alla metà della frequenza di campionamento. Come osservato nel Capitolo 3, tali filtri non sono tuttavia realizzabili e possono solo essere approssimati con filtri “adeguati” alla particolare applicazione: in questa sezione discutiamo l’adeguatezza di un filtro anti-aliasing rispetto alle caratteristiche di un convertitore.

Anticipando la discussione dei paragrafi seguenti, supponiamo che il convertitore sia composto da un campionatore a frequenza ν_s e da un quantizzatore che approssima i valori del segnale utilizzando m bit (si veda la prossima sezione); consideriamo inoltre filtri passabasso caratterizzati dalla loro frequenza di taglio ν_c a 3 dB e frequenza di stop ν_T . Il nostro problema richiede di scegliere ν_s , ν_c e ν_T in modo tale da garantire la corretta conversione di segnali con limite di banda ν_B .

Una possibile soluzione è data da:

1. la frequenza di taglio ν_c a 3 dB può essere scelta pari a ν_B .
2. la frequenza di stop può essere scelta in modo tale che la massima oscillazione in banda proibita sia confrontabile con l’errore introdotto dalla quantizzazione o, equivalentemente, richiedendo che l’attenuazione $-g(\nu_T)$ sia uguale al rapporto segnale rumore SQNR, che per un quantizzatore a m bit vale $6m + 1.7$:

$$-20 \log_{10} |H(\nu_T)| = 6m + 1.7 .$$

Esempio 4.1.3.

Si utilizzi un filtro di Butterworth di ordine 6 come filtro anti-aliasing per un convertitore con quantizzatore a 8 bit; si supponga che i segnali di interesse abbiano limite di banda di $f_{\max} = 300$ Hz. Determinare la frequenza di taglio a 3dB, la dimensione della banda di transizione del filtro e la frequenza di lavoro del convertitore.

Come visto in Sezione 3.2.1, il guadagno di un filtro di Butterworth di ordine 6 con frequenza di taglio a 3dB ν_c è $\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\nu}{\nu_c})^{12}}}$. Osserviamo per prima cosa che la frequenza di taglio ν_c può essere posta a 300 Hz. La frequenza di stop può ora essere determinata eguagliando l'attenuazione al rapporto segnale rumore:

$$10 \log_{10} \left(1 + \left(\frac{\nu_T}{300} \right)^{12} \right) = 6 \times 8 + 1.7 .$$

Si ottiene una frequenza di stop $\nu_T \approx 783$ Hz; la dimensione della banda di transizione risulta allora 483 Hz. La frequenza di stop del filtro anti-aliasing è 783 Hz, e risulta maggiore del tasso di Nyquist pari a 600 Hz. Per garantire un corretto funzionamento del convertitore in presenza di segnali arbitrari occorre allora campionare ad almeno 783 Hz, superiore al tasso di Nyquist.

4.2 Quantizzazione

La *quantizzazione* è il processo che permette di trasformare un segnale a valori continui in un segnale che assume un numero finito di valori. Un modo semplice di quantizzare consiste nel prefissare un insieme finito di l valori numerici $\{x_1, \dots, x_l\}$ e di associare ad ogni numero x il valore numerico x_k che è più vicino a x . Il passo ulteriore è quello della *codifica* dei valori dell'insieme $\{x_1, \dots, x_l\}$ in parole binarie opportunamente codificate

Se i segnali che prendiamo in considerazione hanno ampiezze comprese $-\frac{V}{2}$ tra e $\frac{V}{2}$, questo può essere ottenuto dividendo l'insieme $[-\frac{V}{2}, \frac{V}{2}]$ in l intervalli, detti *livelli*, ed attribuendo ad un punto $x \in [-\frac{V}{2}, \frac{V}{2}]$ il centro del livello in cui x cade. Detti $\{x_1, \dots, x_l\}$ i centri dei vari livelli, l'operazione di quantizzazione può essere allora descritta dalla funzione Q che ad ogni x associa il centro più vicino:

$$Q(x) = \arg \min_{x_i \in \{x_1, \dots, x_l\}} |x - x_i|.$$

Il sistema che realizza l'operazione di quantizzazione è detto *quantizzatore*. Poiché $\{x_1, \dots, x_l\}$ non è uno spazio vettoriale, il quantizzatore non è in generale un sistema lineare. Poiché inoltre la quantizzazione Q è una funzione multi-uno, essa introduce un errore irreversibile nel segnale quantizzato: dato il segnale quantizzato, non è possibile ricostruire in modo esatto il segnale d'origine.

Nel prossimo paragrafo accenniamo ad un'analisi quantitativa di tale tipo di errore.

4.2.1 Quantizzatore Uniforme e Rumore di Quantizzazione

Un sistema quantizzatore in cui l'intervallo $[-V/2, V/2]$ è suddiviso in l livelli di uguale ampiezza V/l è detto *quantizzatore uniforme*; il numero di

$$\Delta = \frac{V}{l} = x_i - x_{i+1}, \quad \text{con } 1 \leq i \leq l-1,$$

è chiamato *passo di quantizzazione*.

Se $l = 2^m$, gli elementi $\{x_1, \dots, x_l\}$ possono essere codificati con parole di m bit:

$$x_i = b_{i1} \cdots b_{im}, \quad \text{con } b_{ik} \in \{0, 1\} \quad (1 \leq i \leq l).$$

Il sistema in questo caso è detto *quantizzatore uniforme* a m bit ed è mostrato in Figura 4.7.

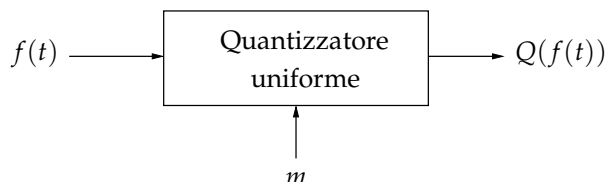


Figura 4.7 Quantizzazione uniforme a m bit.

La Figura 4.8 mostra il risultato del campionamento (pallino bianco) e campionamento più quantizzazione uniforme a quattro livelli (pallino nero) di un segnale $f(t)$.

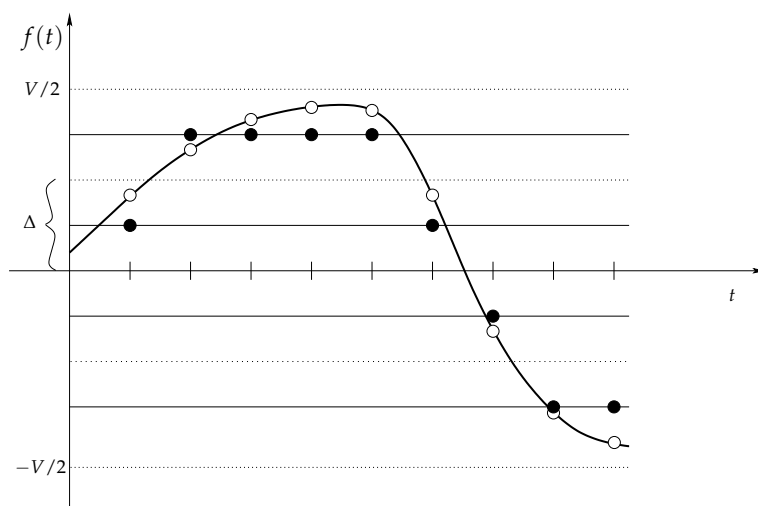


Figura 4.8 Campionamento e quantizzazione uniforme a quattro livelli di un segnale $f(t)$.

Come ben evidenziato dalla Figura, la quantizzazione Q è una funzione multi-uno che introduce un errore irreversibile nel segnale quantizzato. Una naturale misura dell'errore sul numero x è la seguente:

$$e(x) = Q(x) - x.$$

La Figura 4.9 mostra l'errore di quantizzazione per un quantizzatore uniforme di due bit (quattro livelli).

L'errore di quantizzazione ha un comportamento ben differenziato in due zone:

1. Se $x < -V/2$ oppure $x > V/2$, l'errore può essere arbitrariamente grande: in questo caso l'errore è detto *errore da sovraccarico (overload)* e lo si controlla cercando di garantire che i valori del segnale $f(t)$ in ingresso al quantizzatore rientrino nel range del quantizzatore, cioè che $-V/2 \leq f(t) \leq V/2$.

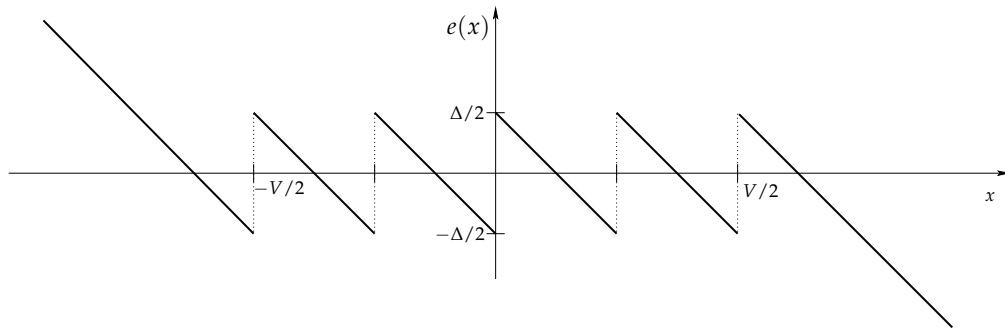


Figura 4.9 Errore di quantizzazione introdotto dal quantizzatore uniforme a quattro livelli.

2. Se x è invece interno all'intervallo $-V/2 \leq x \leq V/2$, l'errore $e(x)$ si mantiene in valore assoluto minore o uguale a $\Delta/2$; tale errore è detto *rumore granulare*.

In seguito supporremo che l'unica sorgente di errore sia il rumore granulare.

Una misura di prestazione del quantizzatore è data dal rapporto segnale-rumore di quantizzazione SQNR (*Signal-to-Quantization-Noise Ratio*), espresso in scala logaritmica e misurato in decibel (dB):

$$\text{SQNR} = 10 \log_{10} \frac{\sigma^2}{\sigma_e^2} \text{ dB},$$

dove σ^2 è la varianza (o potenza) del segnale e σ_e^2 l'errore di quantizzazione quadratico medio (varianza dell'errore).

Osserviamo che nelle nostre ipotesi l'errore di quantizzazione è sempre limitato:

$$-\frac{\Delta}{2} \leq \text{errore} \leq \frac{\Delta}{2}.$$

Per molti segnali deterministici inoltre l'errore è uniformemente distribuito in $[-\Delta/2, \Delta/2]$. Questo significa che la probabilità che l'errore sia compreso fra e ed $e + de$ è de/Δ . L'errore quadratico medio è allora:

$$\sigma_e^2 = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} e^2 \frac{de}{\Delta} = \frac{\Delta^2}{12}.$$

Ipotizziamo che il segnale di riferimento sia $A \sin t/2$. La media di tale segnale è 0, poiché:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\int_{-T}^T \sin t \, dt}{2T} = 0.$$

La varianza σ^2 di tale segnale è invece $A^2/8$. Infatti:

$$\sigma^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\int_{-T}^T (\frac{A}{2} \sin t - 0)^2 dt}{2T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\frac{A^2}{8} \int_{-T}^T (1 + \cos 2t) dt}{2T} = \frac{A^2}{8}.$$

In tal caso:

$$\text{SQNR} = 10 \log_{10} \frac{A^2/8}{\Delta^2/12} = 10 \log_{10} \frac{V^2 A^2}{\Delta^2 V^2} + 10 \log_{10} \frac{3}{2} = 20 \log_{10} l \frac{A}{V} + 1.76 \text{ dB}.$$

Per quantizzatori a m bit vale $l = 2^m$, quindi:

$$\text{SQNR} = 6.02m + 20 \log_{10} \frac{A}{V} + 1.76 \text{ dB.}$$

Si ottiene allora:

Fatto 4.1. In un quantizzatore ogni bit aggiunto comporta un incremento di 6.02 dB al rapporto segnale rumore. Se inoltre il range dinamico A del segnale sfrutta tutto il range V del quantizzatore (cioè $A \approx V$) risulta $\text{SQNR} \approx 6.02m + 1.76 \text{ dB}$.

Esempio 4.2.1.

Determinare il numero di bit da aggiungere a un quantizzatore per migliorare il rapporto segnale-rumore da 40 dB a 68 dB.

Osservando che la differenza tra le prestazioni richieste è di 18 dB e che ogni bit aggiunto al quantizzatore migliora SQNR di 6.02 dB, concludiamo che basta aggiungere $3 \approx \frac{18}{6.02}$ bit.

4.2.2 Quantizzatore Non Uniforme

Spesso per segnali reali la probabilità che un segnale abbia valore tra y e $y + dy$ viene a dipendere da y . La Figura 4.10 mostra come in un classico segnale del parlato ampiezze elevate siano meno probabili di ampiezze piccole: È intuitivo che in questo caso una

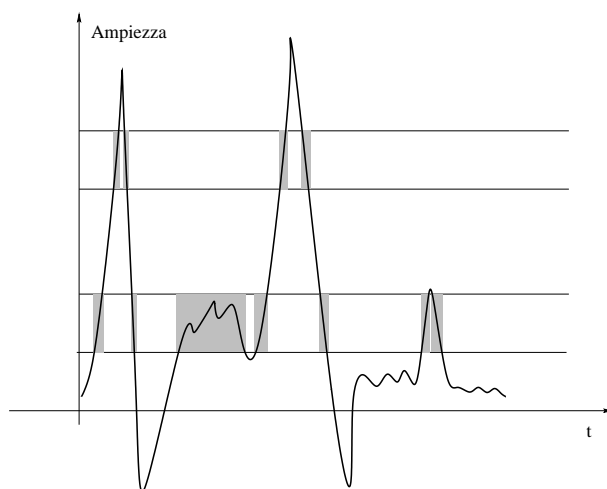


Figura 4.10 Probabilità di varie ampiezze (in grigio).

quantizzazione più fine per ampiezze piccole migliora la qualità del segnale quantizzato, diminuendo l'errore quadratico medio.

Questo risultato può essere ottenuto come segue:

1. Si applica al segnale (che per semplicità consideriamo normalizzato a valori in $[0, 1]$) un funzione F invertibile che "comprime" le ampiezze vicine a 1 (vedi Figura 4.11).

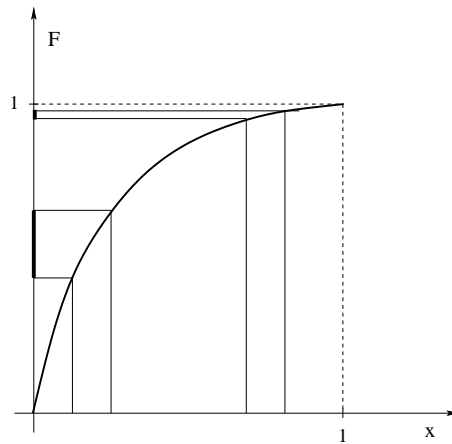


Figura 4.11 Funzione di compressione F .

2. Si applica al segnale “compresso” un quantizzatore uniforme.
3. Il segnale quantizzato viene “decompresso” applicando la funzione F^{-1} inversa di F .

Questo processo, detto *companding* (COMPRESSing and EXPANDING) permette di realizzare un quantizzatore non uniforme, come schematizzato in Figura 4.12.

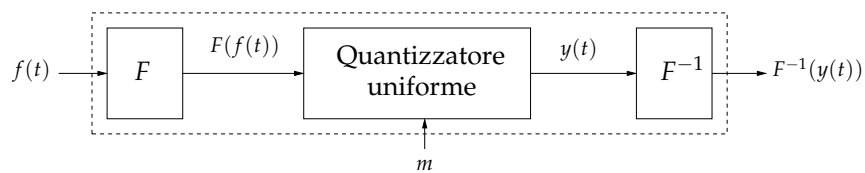


Figura 4.12 Quantizzatore non uniforme.

Esempio 4.2.2.

Nelle applicazioni in telefonia viene usata la famiglia di funzioni μ -law:

$$F_{\mu}(f) = \frac{\ln(1 + \mu|f|)}{\ln(1 + \mu)} \operatorname{sgn}(f), \quad \text{con } -1 \leq f \leq 1,$$

dove f è il segnale normalizzato e μ è un parametro opportuno (usualmente posto a 100 o più recentemente a 255). La funzione μ -law inversa $F_{\mu}^{-1}(y)$ è data da:

$$F_{\mu}^{-1}(y) = \frac{1}{\mu} \left((1 + \mu)^{|y|} - 1 \right) \operatorname{sgn}(y).$$

4.3 Convertitore Analogico-Digitale (ADC)

Applicando un campionatore a frequenza ν_s e consecutivamente un quantizzatore a m bit, un segnale $f(t)$ osservato per un tempo T può essere trasformato in un vettore di $T\nu_s$ componenti a m bit: esso può quindi essere memorizzato in forma digitale usando $T\nu_s m$ bit ed eventualmente modificato.

Il sistema che realizza questa trasformazione è detto *convertitore analogico-digitale* (ADC) e può essere descritto come in Figura 4.13.

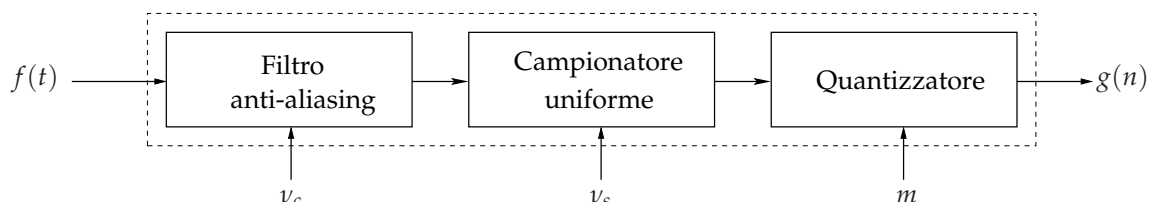


Figura 4.13 Convertitore analogico-digitale ADC.

Il filtro antialiasing in figura è un filtro passabasso ed ha la funzione di porre in ingresso al campionatore un segnale a banda limitata la cui frequenza di Nyquist non superi la frequenza di campionamento.

Esistono essenzialmente due differenti tipologie di convertitori analogico-digitale.

- Nel primo tipo, rappresentato nella figura precedente, il campionatore opera vicino alla frequenza di Nyquist del segnale e il quantizzatore è un quantizzatore ad m bit ($m \gg 1$).
- Nel secondo tipo si usa un campionatore a frequenza molto superiore alla tasso di Nyquist (sovracampionamento), un quantizzatore a 1 bit e varie operazioni digitali.

Nei convertitori analogico-digitali del primo tipo l'elemento critico è il quantizzatore. Fra i vari modelli disponibili, presentiamo qui il Flash ADC di cui riportiamo in Figura 4.14 la realizzazione del quantizzatore a 2 bit.

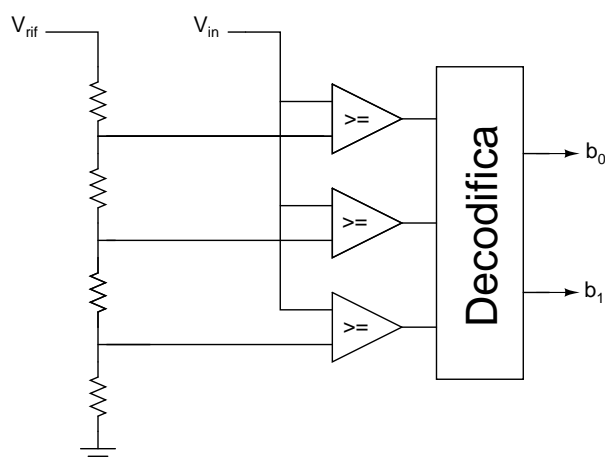


Figura 4.14 Flash ADC (2 bit).

Nel caso generale di un quantizzatore a m bit, la tensione del segnale di ingresso V_{im} viene confrontata con $2^m - 1$ tensioni di riferimento ottenute con un sistema di 2^m resistenze uguali poste in serie. Le uscite binarie dei comparatori (indicati col simbolo \geq in figura) vengono poi trasformate negli m bit di codifica da un opportuno circuito booleano (chiamato "Decodifica" in figura).

Il flash ADC è sicuramente il più veloce convertitore disponibile, ma è costituito da un numero elevato (2^m) di resistenze che devono essere molto accurate: questo rende difficile e costosa la realizzazione per alti valori di m ($m \gg 8$).

Questo fatto è una caratteristica dei convertitori analogico-digitali di questo tipo, che richiedono un'estrema accuratezza nella costruzione del sistema quantizzatore. Risulta allora conveniente un diverso tipo di convertitore, basato sull'idea di operare con frequenze di campionamento molto superiori al tasso di Nyquist utilizzando però un quantizzatore a pochi bit.

Il vantaggio ottenuto è duplice:

1. operando a frequenze molto superiori al tasso di Nyquist, il filtro antialiasing diventa meno critico di quanto non lo sia nei convertitori del primo tipo, e può essere progettato con maggior facilità;
2. l'aumento della frequenza di campionamento si può tradurre in un miglioramento del SQNR del convertitore. La prossima sezione è dedicata ad un'analisi quantitativa di questo fenomeno.

4.3.1 Sovracampionamento nella Conversione Analogico-Digitale

Il teorema del campionamento garantisce la possibilità di ricostruire un segnale a banda limitata da ν_B Hz dal suo campionamento a frequenze almeno pari al tasso di Nyquist, che è $2\nu_B$.

Sovracampionare significa operare un campionamento con frequenza ν_s molto superiore al tasso di Nyquist; il tasso di sovracampionamento è dato dal rapporto tra frequenza di campionamento e tasso di Nyquist:

$$\text{tasso di sovracampionamento} = \frac{\nu_s}{2\nu_B}.$$

Una caratteristica degli attuali ADC è quella di utilizzare al massimo le potenzialità del sovracampionamento, ottenendone due vantaggi rilevanti:

1. possibilità di utilizzo di filtri anti-aliasing con prestazioni non elevate, poiché un filtro passabasso, lavorando a frequenze $\frac{\nu_s}{2}$ molto maggiori della sua frequenza di taglio ν_B , è in grado di garantire una miglior attenuazione, come mostrato in Figura 4.15.
2. miglioramento del rapporto segnale-rumore SQNR dovuto al sovracampionamento.

A questo riguardo, per gran parte dei segnali si può infatti osservare che il rumore di quantizzazione σ_e^2 , dovuto a quantizzazione preceduto da un campionamento a frequenza ν_s , si distribuisce uniformemente su tutte le frequenze $\nu \in [-\nu_s/2, \nu_s/2]$. Le componenti del segnale con frequenze tra ν e $\nu + d\nu$ portano un contributo al rumore pari a $\alpha d\nu$ per una opportuna costante α . Poiché il rumore complessivo è σ_e^2 , segue che:

$$\sigma_e^2 = \int_{-\frac{\nu_s}{2}}^{\frac{\nu_s}{2}} \alpha d\nu = \alpha \nu_s,$$

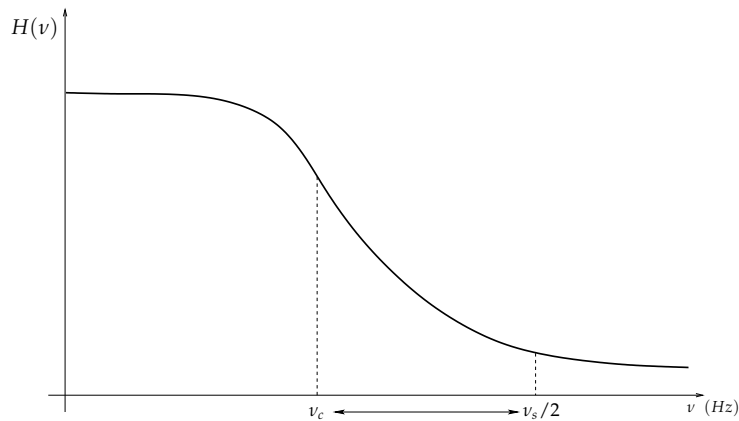


Figura 4.15 Aumentare la frequenza di campionamento migliora l'attenuazione del filtro.

questo comporta che $\alpha = \sigma_e^2 / v_s$, come evidenziato in Figura 4.16.

Il rumore che si sovrappone al segnale utile, che è a banda limitata da f_{\max} , è quello prodotto dalle componenti in frequenza comprese tra $-f_{\max}$ e f_{\max} . Tale rumore equivale all'area segnata in grigio in Figura 4.16 e risulta essere $2f_{\max} / F_s$, inversamente proporzionale al tasso di sovracampionamento. Il rapporto segnale-rumore di quantizzazione, in presenza di sovracampionamento, risulta allora essere:

$$\text{SQNR} = 10 \log_{10} \frac{F_s}{2f_{\max}} \frac{\sigma^2}{\sigma_e^2}$$

Per quantizzatori uniformi a m bit, si può quindi concludere:

Teorema 4.2. Per un ADC con frequenza di campionamento e campionatore a m bit, vale:

$$\text{SQNR} = 10 \log_{10} \frac{F_s}{2f_{\max}} + 6m + 1.7$$

In particolare, raddoppiare la frequenza di campionamento porta a un miglioramento di 3 dB in SQNR.

Esempio 4.3.1.

E' dato un ADC per il trattamento di segnali audio 0 – 20 kHz con quantizzatore di 8

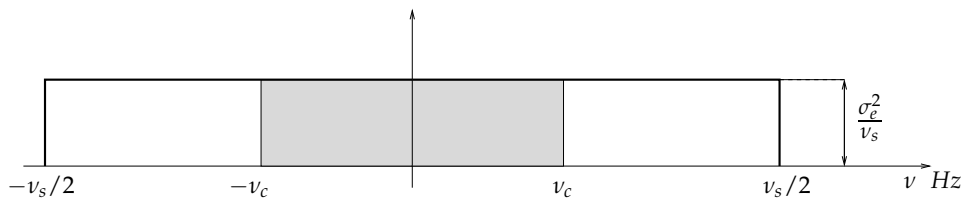


Figura 4.16 Distribuzione del rumore alle varie frequenze.

bit. Determinare la frequenza di campionamento necessaria perché il convertitore ottenga mediante sovracampionamento prestazioni equivalenti a quelle di un quantizzatore a 12 bit.

Poiché ogni bit aggiunto al quantizzatore porta un miglioramento di SQNR di 6 dB, è richiesto un aumento totale di $(12 - 8) \times 6 = 24\text{dB}$. Ricordando che raddoppiare la frequenza di campionamento porta ad un aumento di SQNR di 3 dB, per ottenere il miglioramento di 24 dB bisogna raddoppiare la frequenza 8 volte. Il tasso di Nyquist di segnali a banda limitata da 20 KHz è 40 KHz: la frequenza richiesta risulta allora $2^8 \times 40\text{ KHz}$, cioè 10.24 MHz.

4.3.2 Sovracampionamento: ADC con Quantizzatore di 1 Bit

Le specifiche di alta qualità degli attuali sistemi audio digitali rendono critiche le componenti analogiche degli ADC convenzionali. La disponibilità di h/w digitale di alte prestazioni permette la realizzazione di eccellenti ADC che, grazie al sovracampionamento, possono lavorare con un quantizzatore di un solo bit.

Il cuore di questo tipo di convertitore è dato dal modulatore *sigma-delta* (SDM), rappresentato nella semplice versione di SDM del primo ordine in Figura 4.17.

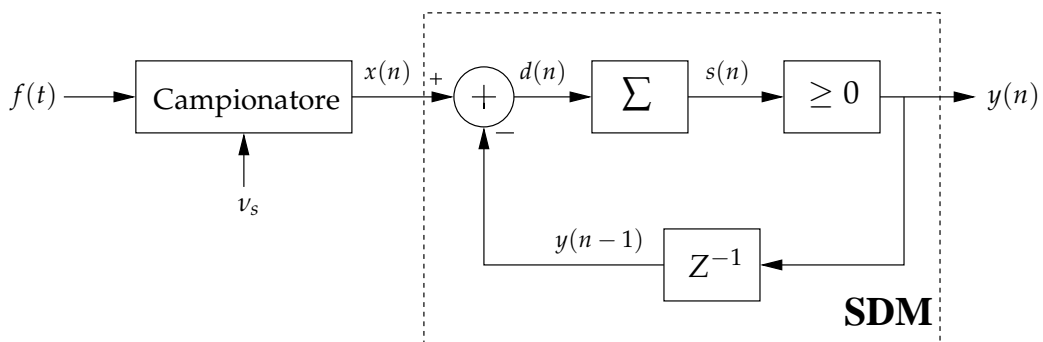


Figura 4.17 SDM del primo ordine.

Il segnale analogico $f(t)$, con banda limitata da v_B , viene sovracampionato a frequenza v_s , dando luogo al segnale $x(n) = f(n\tau)$ con $\tau = 1/v_s$. Il modulatore sigma-delta riceve in ingresso il segnale $x(n)$ e dà in uscita un segnale binario $y(n)$. Tale segnale viene ritardato e sottratto all'ingresso; la differenza $d(n)$ viene posta in ingresso ad un integratore la cui uscita $s(n) = \sum_{k=-\infty}^n d(k)$ viene elaborata da un quantizzatore a 1 bit con uscita:

$$y(n) = \begin{cases} +\delta & \text{se } s(n) > 0 \\ -\delta & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Il modulatore sigma-delta abbatte il rumore di quantizzazione per due ragioni:

1. il sovracampionamento riduce il rumore nella banda di interesse;
2. il modulatore sigma-delta, come mostreremo in Sezione 8.4.3, agisce da filtro passaalto sul rumore di quantizzazione, riducendo il rumore nella banda di interesse.

Come mostreremo in Sezione 8.4.3, vale in particolare:

Teorema 4.3. *Il modulatore sigma-delta del primo ordine a un tasso di sovracampionamento $\frac{v_s}{2v_B}$ migliora il rapporto segnale-rumore di quantizzazione di $30 \log_{10} \frac{v_s}{2v_B} - 9$ dB.*

Raddoppiare la frequenza di campionamento in un SDM del primo ordine provoca dunque un miglioramento del rapporto segnale rumore di 9 dB, di cui 3 dB sono dovuti al sovracampionamento e 6 dB all'azione del modulatore che abbatte il rumore alle basse frequenze e lo aumenta alle alte frequenze (noise shaping). L'applicazione successiva di un filtro passabasso elimina le componenti di rumore alle alte frequenze.

L'uscita di un SDM risulta essere un flusso di bit ad alta frequenza; per ottenere una frequenza di campionamento pari al tasso di Nyquist si applica un processo di decimazione, che ulteriormente consente di trasformare il segnale digitale a 1 bit in un segnale digitale a m bit. La effettiva lunghezza di parola m del convertitore è quella equivalente alla risoluzione ottenibile con il miglioramento in SQNR offerto dal modulatore e dalla decimazione. In Figura 4.18 sono rappresentati i principali passi di un ADC con quantizzatore a 1 bit.

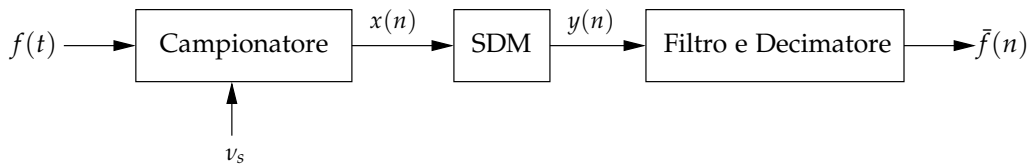


Figura 4.18 ADC con quantizzatore a 1 bit.

Esempio 4.3.2.

Un sistema audio per il trattamento di segnali con frequenze 0 – 20 KHz è basato su tecniche di sovracampionamento ed utilizza un SDM del primo ordine. Il segnale analogico viene trasformato prima in una corrente di bit a una frequenza di 3 MHz e poi, con un processo di decimazione, in un segnale multibit a una frequenza di 48 KHz. Determinare, in bit, la risoluzione del convertitore.

Se il tasso di Nyquist è di 48 KHz, campionando a 3 MHz si ha un tasso di sovracampionamento pari a $\frac{3 \times 10^6}{48 \times 10^3} \approx 83$. L'aumento in SQNR offerto da un SDM di ordine 1 è pari a $30 \log_{10} 83 - 9 \approx 48.6$ dB. Un ADC con risoluzione di m bit, lavorando al tasso di Nyquist, ha un SQNR pari a $6m + 1.7$; ipotizzando che il miglioramento in SQNR sia dovuto essenzialmente al modulatore, la risoluzione m è ottenuta risolvendo l'equazione $6m + 1.7 = 48.6$, ciò che comporta $m = 7.8$ bit.

4.4 Convertitore Digitale-Analogico (DAC)

Il convertitore digitale-analogico (DAC) trasforma un segnale digitale, a tempo e valori discreti, in un segnale analogico. Un modo semplice per convertire un segnale digitale $x(n)$ a frequenza v_s (i cui valori sono specificati da parole di m bit) è quello di trasformarlo nel segnale analogico $g(t)$, dove:

$$g(t) = x(n) \quad \text{per} \quad n\tau \leq t < (n+1)\tau, \quad \text{con} \quad \tau = 1/v_s.$$

Questo tipo di convertitore è detto di tipo ZOH (*Zero-Order-Hold*): la parola binaria al tempo $n\tau$ è convertita nel corrispettivo valore analogico, e tale valore viene mantenuto per tutto l'intervallo seguente di ampiezza τ . Il segnale ottenuto è descritto da una funzione a scala, che può essere "lisciata" applicando un opportuno filtro passabasso, come mostrato in Figura 4.19.

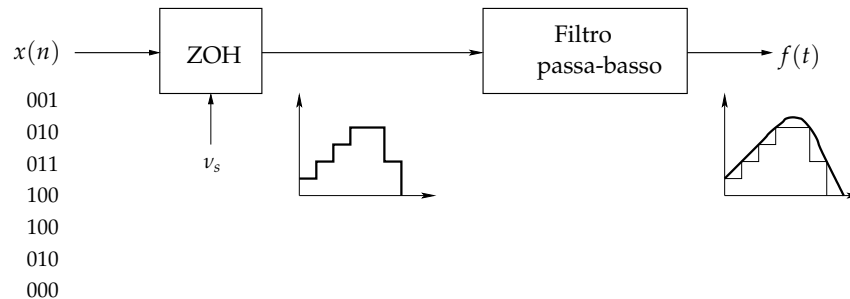


Figura 4.19 Convertitore digitale-analogico.

4.4.1 Analisi in Frequenza di un Convertitore ZOH

Un segnale digitale $x(n)$ può essere interpretato come segnale analogico $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\delta(n\tau)$, in cui tutta l'energia del segnale è concentrata ai tempi discreti $n\tau$. Da questo punto di vista, il convertitore ZOH può essere visto come un sistema lineare tempo-invariante in cui la risposta all'impulso $\delta(t)$ è il rettangolo (vedi Figura 4.20):

$$h(t) = \frac{1}{\tau} \text{rect} \left(\frac{t - \tau/2}{\tau} \right).$$

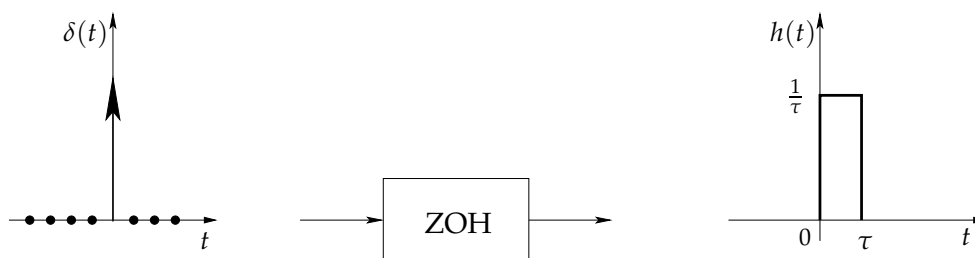


Figura 4.20 Risposta all'impulso di un DAC ZOH.

La funzione di trasferimento $H(\omega)$ di questo sistema è dunque la trasformata di Fourier di $h(t)$, cioè:

$$H(\omega) = e^{-i\frac{\tau}{2}\omega} \frac{2 \sin \frac{\tau}{2}\omega}{\tau\omega}.$$

Il modulo e la fase della funzione di trasferimento del DAC di tipo ZOH a frequenza $\nu_s = 1/\tau$ risultano allora:

$$|H(\omega)| = \left| \frac{2 \sin \frac{\tau}{2}\omega}{\tau\omega} \right|, \quad \angle H(\omega) = -\frac{\tau}{2}\omega.$$

Osserviamo che la fase è lineare, con coefficiente angolare $-\frac{\tau}{2}$.

Il grafico del modulo, limitato alla frequenza di Nyquist πv_s rad/sec, è mostrato in Figura 4.21.

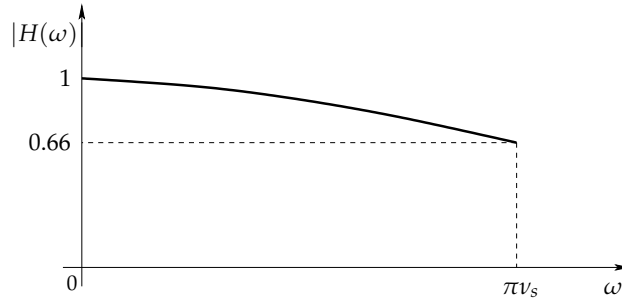


Figura 4.21 Modulo della funzione di trasferimento del DAC.

Si osserva che il guadagno, per le componenti ad alta frequenza ($\omega \approx \pi v_s$) è significativamente minore che per quelle a bassa frequenza ($\omega \approx \pi$): questo fatto può provocare notevoli distorsioni nel segnale. Per ricostruire il segnale in modo fedele è allora utile mettere in sequenza al DAC un sistema lineare tempo invariante EQ con funzione di trasferimento $1/H(\omega)$, in modo che il sistema complessivo (DAC + E) risulti avere guadagno $G(\omega)$, con:

$$G(\omega) = \left| H(\omega) \frac{1}{H(\omega)} \right|^2 = 1.$$

Il circuito che realizza E viene detto *equalizzatore* ed è caratterizzato da una funzione di trasferimento $H_1(\omega)$ il cui modulo, mostrato in Figura 4.22, è

$$H_1(\omega) = \frac{\tau\omega}{2 \sin \frac{\tau}{2}\omega}.$$

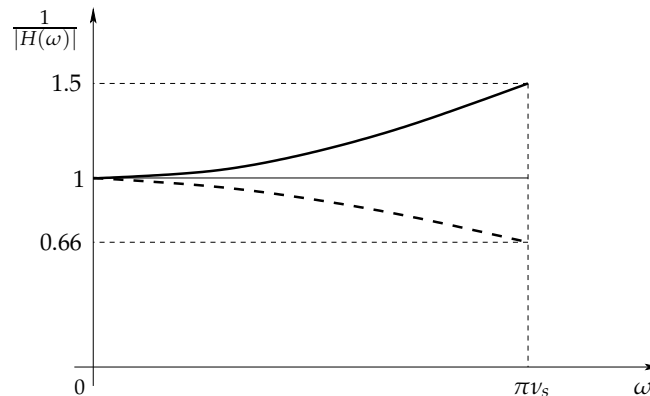


Figura 4.22 Modulo della funzione di trasferimento dell'equalizzatore.

Realizzare un equalizzatore, in questa applicazione, equivale quindi a determinare un sistema LTI il cui modulo, nella zona di lavoro, sia almeno approssimativamente $1/|H(\omega)|$.

Il sistema complessivo necessario ad elaborare digitalmente i segnali viene mostrato in Figura 4.23.

4.4.2 Sovracampionamento nella Conversione Digitale-Analogica

Le motivazioni che inducono ad esplorare gli effetti del sovracampionamento nella conversione analogico-digitale sono quelle già analizzate per la conversione digitale-analogica. Ci limitiamo qui a illustrare un esempio d'impiego di questi principi nei lettori di CD.

Esempio 4.4.2.

Una semplificazione dei blocchi costituenti il lettore è mostrato in Figura 4.25.

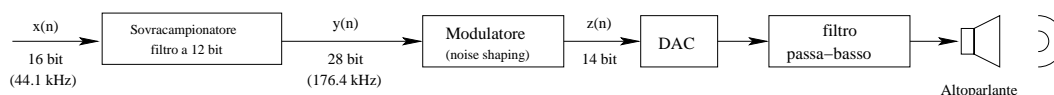


Figura 4.25 Lettore per CD commerciali.

Il segnale di ingresso $x(n)$ è un segnale digitale con parole di 16 bit a frequenza di 44.1 KHz. Il segnale viene sovracampionato con tasso 4 e filtrato digitalmente con un filtro FIR con coefficienti di 12 bit, ottenendo un segnale $y(n)$ con parole di $16 + 12 = 28$ bit a una frequenza di $4 \times 44.1 = 176.4$ KHz. Il segnale viene inviato a un modulatore che, come nel caso del SDM, sposta il rumore alle alte frequenze ed infine quantizzato per arrotondamento ai primi 14 bit. Il DAC seguente, con risposta in frequenza tipo $\sin x/x$, ha l'ulteriore effetto di abbattere il rumore alle alte frequenze del 34%.

Anche se il DAC lavora a 14 bit, l'effetto è quello di un DAC a 16 bit: i due bit guadagnati sono prodotti da un miglioramento in SQNR di 12 dB, di cui 6 dovuti al sovracampionamento e 6 al modulatore.

4.5 Trasmissione di Segnali Digitalizzati

Le comunicazioni a distanza sono un elemento prioritario della vita moderna. Grandi quantità di dati vengono scambiati per mezzo di reti telefoniche, radio o TV; in quest'ottica, problematiche di grande interesse sono da un lato lo studio e lo sviluppo di nuovi canali fisici di trasmissione, dall'altro le tecniche di codifica dei dati per una loro efficiente trasmissione sui canali fisici disponibili.

Un'importante parametro di efficienza è il tasso di compressione: dati compressi possono essere trasferiti a tassi di trasmissione meno elevati. In questo contesto, un vantaggio dell'elaborazione digitale è quello di poter applicare ai dati algoritmi di codifica efficienti. Un'ulteriore richiesta è la possibilità di correggere, in ricezioni, eventuali errori di trasmissione.

Analizziamo qui brevemente alcune problematiche sulla trasmissione di segnali digitalizzati. E' conveniente considerare separatamente due fasi:

1. riduzione del segnale $f(t)$ ad una sequenza, detta flusso (stream) di bit;
2. associazione ad ogni sequenza di bit di un segnale composto da rettangoli (codifica di linea).

4.5.1 Modulazione a Impulso

Una prima soluzione al problema di trasformare un flusso di bit in un treno di impulsi può essere ottenuta utilizzando un ADC con quantizzatore a m bit, che trasforma un segnale $f(t)$ in una sequenza $x(n)$ di parole binarie di m bit. L'accostamento di tali parole realizza un flusso di bit, che può essere codificato dal segnale a componenti rettangolari come in Figura 4.26.

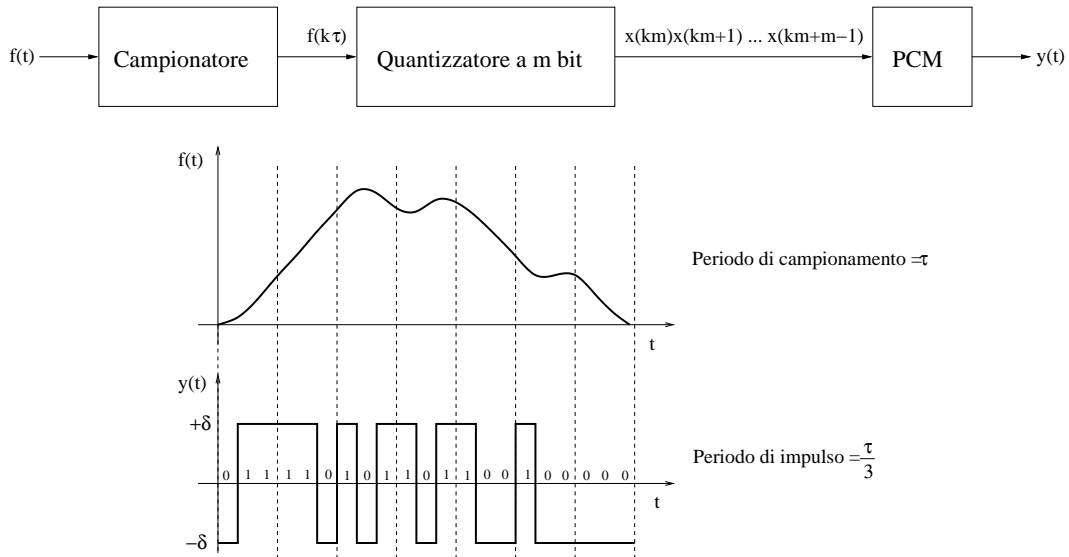


Figura 4.26 Modulazione a Impulso con $m = 3$.

Questa particolare codifica di segnali con forme d'onda "digitali" è detta *Modulazione a Impulso* (PCM - Pulse Coded Modulation). Varianti possono essere ottenute con diverse codifiche dei livelli di quantizzazione.

Dato un quantizzatore a m bit, sono infatti possibili molte codifiche distinte dei 2^m livelli di quantizzazione. Tre comuni codifiche sono mostrate in Tabella 4.1 per un quantizzatore a 8 livelli ($m = 3$).

La codifica naturale coincide con l'usuale rappresentazione binaria dei numeri interi

Tabella 4.1 Codifiche del livello di quantizzazione.

N° livello	Codifica naturale	Codifica con segno	Codifica di Gray
1	000	011	010
2	001	010	011
3	010	001	001
4	011	000	000
5	100	100	100
6	101	101	101
7	110	110	111
8	111	111	110

$0, 1, \dots, 2^n - 1$. Nella codifica con segno il primo bit significativo rappresenta il segno; essa corrisponde all'usuale codifica dei numeri interi relativi $-2^{n-1} + 1, \dots, 2^{n-1} - 1$. Una terza rappresentazione è la codifica di Gray, in cui le parole binarie che identificano due livelli consecutivi differiscono di un solo bit; questa codifica è interessante perché un errore sulla codifica di un livello k dà luogo in generale a livelli mediamente "vicini" a k , rendendo più semplice il meccanismo di rilevamento e correzione di errore in ricezione.

4.5.2 Delta-Modulazione

Una seconda soluzione può essere ottenuta con una tecnica detta *Delta-Modulazione* (DM). Essa è realizzata dal convertitore analogico-digitale con quantizzatore a 1 bit mostrato in Figura 4.27.

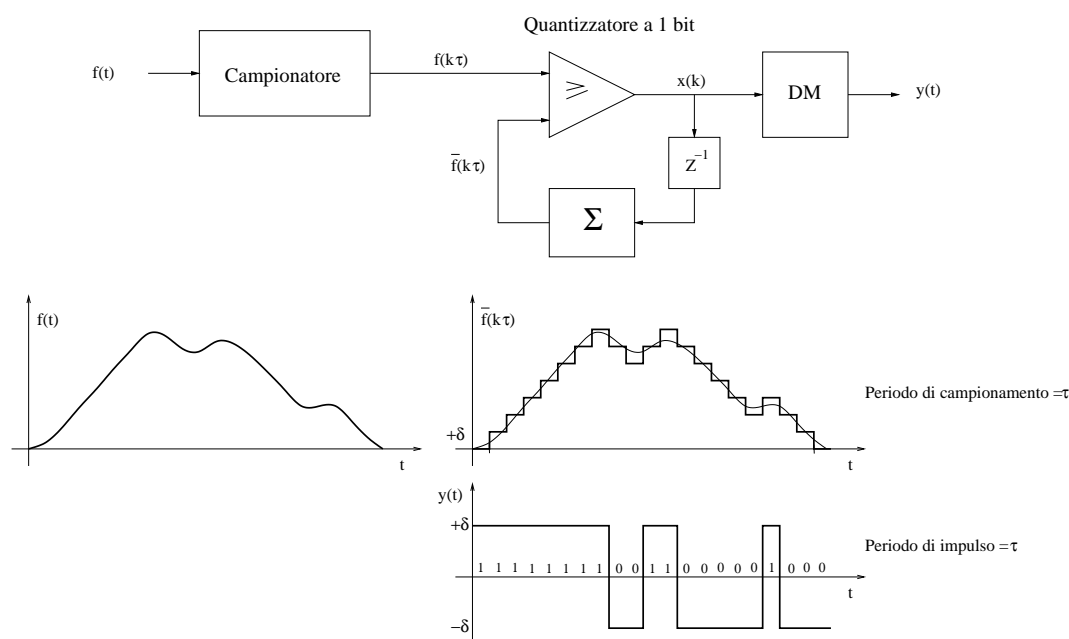


Figura 4.27 Delta-Modulazione (DM).

Il segnale analogico $f(t)$ viene campionato con periodo τ e ai tempi $k\tau$ viene posto in uscita un segnale binario $x(k)$, dove $x(0) = 0$ e:

$$x(k) = \begin{cases} +\delta & \text{se } \bar{f}(k\tau) \geq \sum_{j=0}^{k-1} x(j) \\ -\delta & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Si osservi che la delta-modulazione richiede di trasmettere solo 1 bit per ogni campione, mentre la PCM richiede di trasmettere m bit per ogni campione. Tuttavia la DM presenta uno svantaggio: fissato δ , essa può trattare efficacemente segnali di opportuna pendenza e ampiezza, altrimenti si generano errori sistematici, come illustrato in Figura 4.28.

Essa richiede dunque preliminarmente di conoscere alcune caratteristiche del segnale. Allo scopo di ridurre la dipendenza di questa tecnica dal tipo di segnale, sono state studiate e introdotte varianti della PM, più costose ma più flessibili, come la DPCM (Differential Pulse Coded Modulation) o la DPCM adattativa.

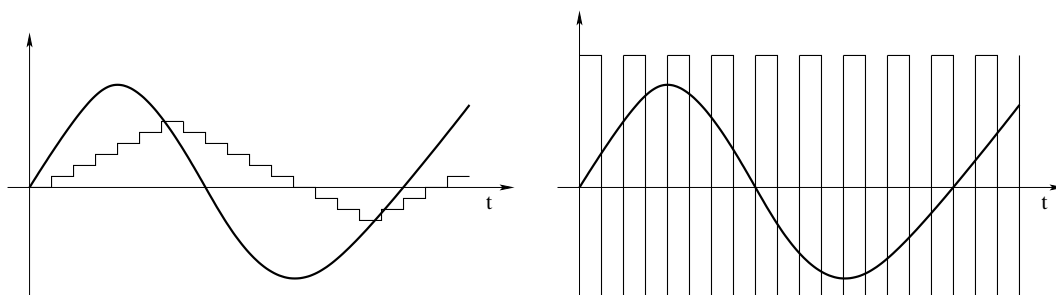


Figura 4.28 Errori introdotti dalla DM.

Naturalmente è possibile accoppiare le tecniche di modulazione con algoritmi di compressione. Un esempio importante sarà mostrato in Sezione 5.4.2.

4.5.3 Codifica di Linea

Una volta che il segnale è stato codificato con una sequenza di 0 e 1, esso può essere elaborato o trasmesso su un opportuno canale. Se si vuol trasmettere l'informazione direttamente in forma digitale, senza modulazione analogica, è necessario assegnare ad ogni simbolo 0 o 1 del messaggio da trasmettere un opportuno segnale rettangolare all'interno di una durata di τ secondi. Quest'operazione, che fa corrispondere ad ogni parola di 0 e 1 un segnale composto da rettangoli, viene detta *codifica di linea*.

Vi sono varie possibili codifiche di linea; di alcune di esse diamo qui una descrizione sommaria.

1. Nella codifica unipolare NRZ, 1 viene rappresentato col valore $+V$ per la durata di tutto l'intervallo τ , mentre lo 0 col valore 0 per tutto l'intervallo τ . Qui "unipolare" significa che i valori possibili del segnale sono 0, $+V$; NRZ (NonReturn to Zero) significa che il segnale corrispondente a 1 non ritorna mai a 0 nell'intervallo τ .
2. Nella codifica polare RZ, 1 viene rappresentato col segnale che vale $+V$ per la prima metà dell'intervallo τ e vale 0 nella seconda metà, mentre 0 viene rappresentato col segnale che vale $-V$ per la prima metà dell'intervallo τ e vale 0 nella seconda metà. Qui "polare" significa che i valori possibili del segnale sono $+V$, 0, $-V$; RZ (Return to Zero) significa che il segnale nell'intervallo di ampiezza τ torna a 0.
3. Nella codifica bipolare 0 viene rappresentato col valore 0 per la durata di tutto l'intervallo τ , mentre 1 viene rappresentato alternativamente col segnale che vale $+V$ per la prima metà dell'intervallo τ e vale 0 nella seconda metà, o $-V$ nella prima metà e 0 nella seconda.

La Figura 4.29 mostra il segnale che corrisponde nelle varie codifiche di linea al messaggio 10110100111.

Vi sono naturalmente importanti differenze tra le varie codifiche. Ad esempio, dal punto di vista dell'errore di trasmissione, si può osservare che la codifica bipolare permette di rilevare un errore di trasmissione, a causa dell'alternanza delle polarità nella codifica degli 1.

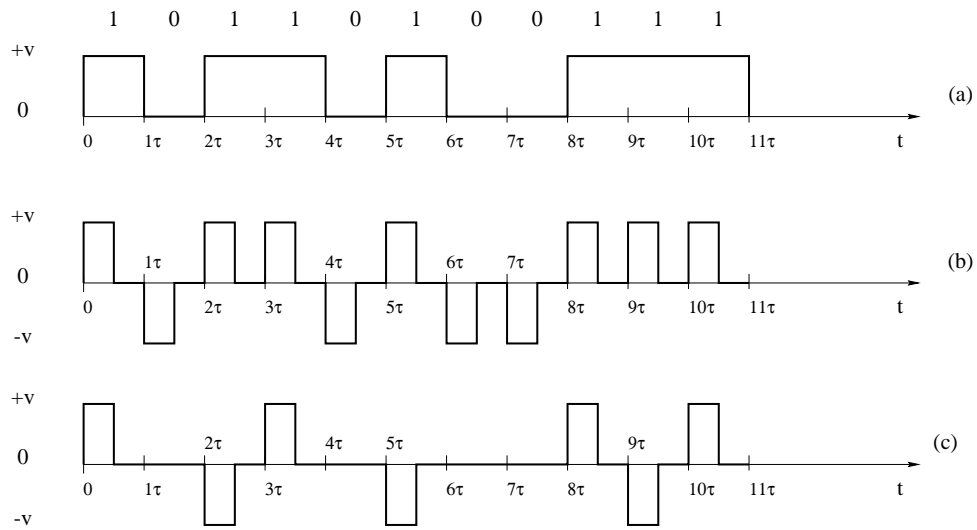


Figura 4.29 Codifiche di linea: (a) unipolare NRZ, (b) polare RZ, (c) bipolare RZ.

Dal punto di vista dell'analisi spettrale, si può dimostrare che l'energia del segnale associato alla codifica bipolare è concentrata per frequenze minori di $1/\tau$, che è il tasso di trasmissione, mentre per la codifica polare RZ tale energia è concentrata sotto il doppio del tasso di trasmissione.