

## ANALISI IN FREQUENZA DI SEGNALI ANALOGICI

È noto che la luce (solare) può essere decomposta nei colori dell'arcobaleno mediante un prisma. In un articolo sottoposto nel 1672 alla Royal Society, Isaac Newton fece ricorso al termine *spettro* per descrivere la banda continua di colori prodotta da tale apparato. Più tardi, nella metà del 1800, Kirchhoff e Bunsen scoprirono che ogni elemento chimico, quando portato all'incandescenza, irradia una sua propria luce colorata, cosa che ha permesso di affermare che ogni elemento chimico è caratterizzato da una particolare linea spettrale. D'altro lato, dalla fisica sappiamo che ogni colore corrisponde a una ben determinata frequenza nello spettro del visibile. Quindi il lavoro iniziato da Newton di analisi della luce nelle sue componenti di colore è a tutti gli effetti una *analisi in frequenza*. Nell'ambito della teoria dei segnali, in luogo ai colori sprigionati dalla luce si considerano forme d'onda trigonometriche (sinusoidali) a determinate frequenze e come strumento di analisi, al posto del prisma, si impiegano noti oggetti matematici che vanno sotto il nome di *serie e trasformate di Fourier*.

Relativamente allo studio dei sistemi LTI, questo strumento ha permesso di portare un cambiamento fondamentale nella rappresentazione del segnale: invece di esprimerlo come sovrapposizione di impulsi lo si rappresenta come sovrapposizione di altri segnali-base, tra i quali spicca la base di Fourier.

Jean Baptiste Joseph Baron de Fourier, governatore del Basso Egitto sotto Napoleone e

autore un monumentale trattato sulla propagazione del calore pubblicò il suo lavoro nel 1822. In questo lavoro veniva introdotto il concetto di serie di Fourier applicato a segnali periodici. La trasformata di Fourier (o integrale di Fourier) è una semplice estensione della serie che si applica a segnali arbitrari.

Per l'introduzione della trasformata di Fourier è opportuno considerare segnali a valori complessi: poiché i numeri reali sono un sottocampo dei complessi, potremo trattare i segnali reali come opportune restrizioni.

Il capitolo è suddiviso come segue. Viene richiamata brevemente la nozione di numero complesso e le principali operazioni su tali numeri. Viene poi introdotta la classe dei segnali periodici e discussa la loro espansione in serie di Fourier. Questo approccio viene esteso a segnali non periodici, definendo la trasformata di Fourier e studiandone alcune proprietà che rendono semplice la manipolazione di questo strumento.

I concetti matematici esposti vengono poi applicati all'analisi della risposta in frequenza di sistemi LTI a tempo continuo, introducendo la nozione di funzione di trasferimento. Si analizzano in particolare i filtri ideali, introducendo la terminologia relativa ed evidenziandone la non causalità. Vengono quindi trattate problematiche di analisi relative alla classe dei sistemi causali descritti da equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti; questi sistemi sono particolarmente interessanti perché descrivono il comportamento di circuiti a componenti passive utilizzati per la realizzazione pratica di filtri analogici.

L'ultima parte del capitolo è dedicata allo studio della modulazione di ampiezza (AM) e frequenza (FM), di grande interesse per la trasmissione di segnali a tempo continuo.

## 2.1 Numeri Complessi

Richiamiamo qui brevemente alcune nozioni relative ai numeri complessi, la cui introduzione è stata motivata soprattutto dalla necessità di trattare compiutamente le equazioni algebriche, ma che si è successivamente rivelato anche un sistema numerico indispensabile per la rappresentazione di funzioni di variabili reali.

Un numero complesso  $z$  è identificato da una coppia di numeri reali  $(a, b)$ ; si scrive solitamente  $z = a + ib$ , chiamando  $i = \sqrt{-1}$  *unità immaginaria*,  $a = \operatorname{Re}\{z\}$  *parte reale* e  $b = \operatorname{Im}\{z\}$  *parte immaginaria* di  $z$ .

Le operazioni di addizione e moltiplicazione di due numeri complessi  $z$  e  $w$  sono definite nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \text{somma: } & (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d), \\ \text{prodotto: } & (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc). \end{aligned}$$

Rispetto a tali operazioni i numeri complessi formano un campo, denotato con il simbolo  $\mathbb{C}$ ; in particolare si verifica direttamente che l'inverso rispetto alla moltiplicazione è dato da:

$$(a + ib)^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Il sottocampo di numeri complessi della forma  $(a, 0)$  (cioè tutti quelli che hanno parte immaginaria 0) è isomorfo al campo reale  $\mathbb{R}$ .

Poiché un numero complesso  $z = (a, b)$  è una coppia ordinata di numeri reali, esso può essere rappresentato geometricamente come un punto di un piano. Descrivendo tale punto

in coordinate polari  $(r, \theta)$ , come mostrato in Figura 2.1, si ricava la forma *trigonometrica* di un numero complesso:

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

La relazione tra coordinate polari  $(r, \theta)$  e coordinate cartesiane  $(a, b)$  è data dalla seguente

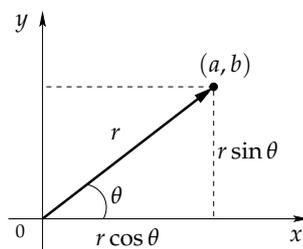


Figura 2.1 Rappresentazione geometrica del numero complesso  $a + ib$ .

coppia di equazioni:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(\operatorname{Re}\{z\})^2 + (\operatorname{Im}\{z\})^2}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}\{z\}}{\operatorname{Re}\{z\}}\right),$$

dove  $r$  è chiamato *modulo* di  $z$  mentre  $\theta$  è la sua *fase*; scriveremo come notazione  $r = |z|$  e  $\theta = \angle z$ .

Un'altra utile rappresentazione di un numero complesso è la cosiddetta forma *esponenziale* o *polare*:

$$z = r e^{i\theta},$$

che si ottiene applicando alla forma trigonometrica la relazione di Eulero

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

Quest'ultima rappresentazione è utile specialmente riguardo alla moltiplicazione e alla divisione di numeri complessi. Il prodotto di due numeri complessi è il numero complesso che ha come modulo il prodotto dei due moduli e come fase la somma delle due fasi:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|; \quad \angle(z_1 \cdot z_2) = \angle z_1 + \angle z_2.$$

Infatti, se  $z_1 = r_1 e^{i\theta}$  e  $z_2 = r_2 e^{i\phi}$ , si ha:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos \theta + i \sin \theta) \cdot r_2(\cos \phi + i \sin \phi) \\ &= r_1 r_2 [\cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi + i(\sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi)] \\ &= r_1 r_2 [\cos(\theta + \phi) + i \sin(\theta + \phi)] = r_1 r_2 e^{i(\theta + \phi)} \end{aligned}$$

La potenza ennesima di  $z = r e^{i\theta}$  si ottiene facilmente applicando ripetutamente la formula precedente:

$$z^n = r^n e^{in\theta} = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta).$$

La radice  $n$ -esima di un numero complesso  $z$  è un numero  $w$  tale che  $w^n = z$ . Se  $z = \rho e^{i\theta}$  e  $w = r e^{i\psi}$ , vale allora:

$$\rho e^{i\theta} = r^n e^{in\psi}$$

Ricordando che due numeri complessi sono uguali se hanno lo stesso modulo e la differenza fra le fasi è multipla intera di un angolo giro, otteniamo:

$$r^n = \rho \quad \text{e} \quad n\psi - \theta = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Si conclude allora che un numero complesso  $\rho e^{i\theta}$  ha  $n$  radici complesse tutte con lo stesso modulo  $r = \rho^{1/n}$  e fasi  $\psi = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$  ( $k = 0, \dots, n-1$ ).

Il caso  $z = 1$  è particolarmente importante. Le radici dell'equazione  $w^n = 1$  si chiamano radici  $n$ -esime dell'unità. Posto

$$\omega = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$$

le radici  $n$ -esime dell'unità sono quindi:

$$1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}.$$

Un'operazione importante che si può definire sui numeri complessi è quella di *coniugazione*, che consiste nel cambiare il segno alla parte immaginaria. Se  $z = a + ib$ , il *complesso coniugato* di  $z$  è il numero complesso  $\bar{z} = a - ib$ . Geometricamente  $\bar{z}$  rappresenta il simmetrico di  $z$  rispetto all'asse reale. La definizione di coniugato implica che:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 / z_2} = \bar{z}_1 / \bar{z}_2.$$

Risulta inoltre che la somma e il prodotto di numeri complessi coniugati sono sempre numeri reali; in particolare:

$$z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} \{z\}, \quad z\bar{z} = |z|^2.$$

Riassumendo, la notazione precedentemente introdotta ci consente di:

1. esprimere un numero complesso in forma esponenziale  $z = r e^{i\theta}$ ,
2. esprimere le funzioni trigonometriche mediante quella esponenziale, più semplice da manipolare:

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos \theta + i \sin \theta, & e^{-i\theta} &= \cos \theta - i \sin \theta \\ \cos \theta &= \frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}), & \sin \theta &= \frac{1}{2i} (e^{i\theta} - e^{-i\theta}). \end{aligned}$$

## 2.2 Segnali Periodici

In questa sezione introduciamo la classe di segnali che "si ripetono periodicamente nel tempo", detti anche *segnali periodici*. Più precisamente, diremo che un segnale  $f(t)$  è periodico di periodo  $T$  se si verifica che

$$f(t) = f(t + T), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Si osservi che se  $f(t)$  è periodico di periodo  $T$  allora, per ogni  $k \in \mathbb{Z}$  è periodico di periodo  $kT$ , cioè  $f(t) = f(t + kT)$ ; Il minimo valore del periodo  $T > 0$  che soddisfa la definizione di periodicità è chiamato *periodo fondamentale* e denotato da  $T_0$ . Se la funzione  $f(t)$ , periodica di periodo  $T$ , risulta pertanto univocamente individuata dalla sua restrizione all'intervallo  $-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$ , come mostrato in Figura 2.2.

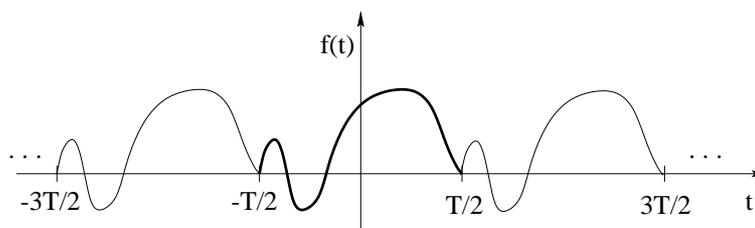


Figura 2.2 Funzione periodica di periodo  $T$ .

### Esempio 2.2.1.

Esempi importanti di funzioni periodiche sono le funzioni trigonometriche  $\sin t$  e  $\cos t$ , che hanno periodo  $2\pi$ . Osserviamo anche che  $\sin 2\pi t$  e  $\cos 2\pi t$  sono periodiche di periodo 1. In effetti, se  $T$  è un numero positivo qualsiasi, le funzioni  $\sin \frac{2\pi}{T}t$  e  $\cos \frac{2\pi}{T}t$  sono periodiche di periodo  $T$ .

È facile verificare che la combinazione lineare di funzioni periodiche di periodo  $T$  è una funzione periodica dello stesso periodo. Si osservi inoltre che se  $f(t)$  è periodica di periodo  $T$ , allora  $f(\alpha t)$  è periodica di periodo  $T/\alpha$ . Più in generale, se  $f(t)$  è una funzione periodica di periodo  $S > 0$  allora la funzione  $g(t) = f\left(\frac{S}{T}t\right)$  è periodica di periodo  $T > 0$ . Viceversa ogni funzione  $g$ , periodica di periodo  $T$ , può essere ottenuta dalla funzione  $f(t) = g\left(\frac{T}{S}t\right)$ . In altre parole tutte le funzioni periodiche di periodo  $T$  possono essere facilmente ottenute con un semplice cambiamento di scala dalle funzioni periodiche di periodo  $S$ , con  $S$  fissato. Questo fatto, e l'importanza delle funzioni trigonometriche  $\sin t$  e  $\cos t$  giustifica la scelta di studiare prevalentemente le funzioni periodiche di periodo  $2\pi$ .

Per un dato un segnale periodico  $f(t)$ , con *frequenza* del segnale si intende il numero di ripetizioni del periodo nell'unità di tempo. Se l'unità di misura del tempo è il secondo (sec), la frequenza, denotata da  $\nu$ , può essere misurata in cicli al secondo o *hertz* (Hz), oppure in radianti al secondo (rad/sec), detta anche *pulsazione* ed è denotata da  $\omega$ . Quindi un segnale  $f(t)$ , di periodo  $T$ , ha frequenza

$$\nu = \frac{1}{T} \text{ Hz,} \quad \text{oppure} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \text{ rad/sec.}$$

La *frequenza fondamentale* invece è definita come  $\omega_0 = 2\pi\nu_0 = \frac{2\pi}{T_0}$  (rad/sec), mentre  $\nu_0$  è la frequenza fondamentale in hertz se  $T_0$  è il periodo fondamentale.

### Esempio 2.2.2.

Il segnale  $\cos \omega t$  ha una frequenza di  $\omega$  rad/sec oppure di  $\frac{\omega}{2\pi}$  Hz; analogamente un segnale di 6 kHz ha una frequenza di circa 38.000 rad/sec.

### Esempio 2.2.3.

Nei sistemi di comunicazione è usuale dividere le frequenze in *bande*. Una convenzione

spesso usata è quella di identificare le bande con numeri, così che la banda  $N$  è data da tutte le frequenze:

$$0.3 \times 10^N \text{ Hz} < \text{banda } N < 3 \times 10^N \text{ Hz} .$$

Ad esempio, la banda 6 va da 300 kHz a 3 MHz.

Per quanto riguarda la classificazione sono state individuate le seguenti bande:

- le frequenze audio occupano le bande 2,3,4 (30 Hz ÷ 30 kHz);
- le frequenze video occupano le bande 1,2,3,4,5,6,7 (fino a 30 MHz);
- le microne occupano le bande 8,9,10,11 (30 MHz ÷ 300 GHz).

La banda 5 è anche detta LF (bassa frequenza), la banda 6 è detta MF (media frequenza), la banda 7 è detta HF (alta frequenza), la banda 8 è detta VHF e la banda 9 è detta UHF. Le usuali trasmissioni radio in modulazione di ampiezza avvengono nella banda MF(6), quelle in modulazione di frequenza nella banda VHF (8).

### Segnale Sinusoidale ed Esponenziale Complesso

Un *segnale sinusoidale* si ottiene per dilatazione/compressione e/o traslazione di una funzione seno ed è definito dalla seguente espressione:

$$f(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi), \quad -\infty < t < \infty$$

dove  $A$  indica l'ampiezza del segnale,  $\omega_0$  la frequenza e  $\phi$  è la fase iniziale, ossia la fase al tempo  $t = 0$ . In Figura 2.2 è mostrato un segnale sinusoidale ottenuto dalla proiezione sull'asse verticale del vettore di modulo  $A$  con origine nel centro degli assi che ruota in senso antiorario ad una velocità angolare (frequenza)  $\omega_0$  e con fase iniziale  $\phi$ . Un segnale cosinusoidale, invece, è la proiezione del moto sull'asse orizzontale. L'unica differenza nella forma d'onda di seno e coseno è uno sfasamento reciproco pari a  $\pi/2$  e spesso useremo il termine sinusoidale per indicare entrambe le funzioni.

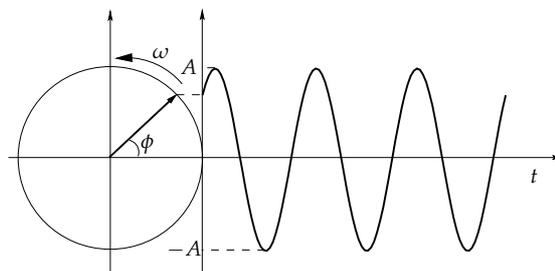


Figura 2.3 Grafico del segnale sinusoidale.

Un *segnale esponenziale complesso*, detto anche *fasore*, è un segnale della forma

$$f(t) = A e^{i(\omega_0 t + \phi_0)}, \quad -\infty < t < \infty$$

dove  $A > 0$  è un reale che rappresenta l'ampiezza,  $\omega_0 \in \mathbb{R}$  è la pulsazione, misurata in rad/sec e  $\phi_0$  è la fase iniziale, misurata in rad. Il segnale  $e^{i\omega_0 t}$  è periodico con periodo

$T_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$  e frequenza  $\omega_0$  rad/sec o  $\frac{\omega_0}{2\pi}$  Hz; il suo modulo è uguale a 1 e la fase è uguale a  $\omega_0 t$ .

Il fasore è un segnale che assume valori complessi, e pertanto non può essere rappresentato in funzione del tempo su un convenzionale diagramma cartesiano  $(t, f)$ . Tuttavia, anche se il segnale  $Ce^{i\omega_0 t}$  non ha diretto significato fisico, esso può essere ottenuto come combinazione di segnali sinusoidali

$$Ce^{i\omega_0 t} = Ae^{i\phi}e^{i\omega_0 t} = Ae^{i(\omega_0 t + \phi)} = A \cos(\omega_0 t + \phi) + iA \sin(\omega_0 t + \phi)$$

mentre i segnali reali  $\cos(\omega_0 t + \phi)$  e  $\sin(\omega_0 t + \phi)$  possono essere ottenuti come combinazioni lineari di  $e^{i(\omega_0 t + \phi)}$  e  $e^{-i(\omega_0 t + \phi)}$ :

$$\cos(\omega_0 t + \phi) = \frac{1}{2} \left( e^{i(\omega_0 t + \phi)} + e^{-i(\omega_0 t + \phi)} \right) \quad (2.1)$$

$$\sin(\omega_0 t + \phi) = \frac{1}{2i} \left( e^{i(\omega_0 t + \phi)} - e^{-i(\omega_0 t + \phi)} \right). \quad (2.2)$$

La frequenza è, per definizione, una quantità intrinsecamente positiva, posto che rappresenta essenzialmente il numero di ripetizioni (cicli) per unità di tempi di una data forma d'onda. Tuttavia, per motivi di convenienza matematica, si introducono anche le frequenze negative visto che i segnali sinusoidali (2.1) e (2.2) sono espressi come combinazione di due esponenziali complessi coniugati (fasori) aventi ugual modulo e velocità angolari di valore opposto  $\pm\omega_0$ .

## 2.3 Risposta in Frequenza dei Sistemi LTI

L'importanza delle funzioni esponenziali complesse nello studio dei sistemi LTI risiede nel fatto che la risposta di un sistema LTI sollecitato da questo tipo di segnale è lo stesso esponenziale complesso variato in ampiezza, cioè:

$$e^{i\omega t} \longrightarrow H(\omega)e^{i\omega t}$$

dove il fattore  $H(\omega)$  è in generale una funzione complessa nella variabile  $\omega$ .

Per provare questa proprietà si consideri un sistema LTI con risposta all'impulso  $h(t)$ . Per ogni ingresso  $f(t)$  possiamo determinare l'uscita mediante l'uso dell'integrale di convoluzione; quindi se  $f(t) = e^{i\omega t}$  avremo che l'uscita  $y(t)$  è:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)f(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{i\omega(t-\tau)}d\tau = e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau.$$

Assumendo che l'integrale sia definito, la risposta del sistema all'ingresso  $e^{i\omega t}$  è dunque della forma

$$y(t) = H(\omega)e^{i\omega t}$$

dove

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau. \quad (2.3)$$

La funzione  $H(\omega)$ , che compare nell'equazione (2.3), viene chiamata *risposta in frequenza* o *funzione di trasferimento* del sistema.

Come vedremo di seguito,  $H(\omega)$  è la trasformata di Fourier della risposta all'impulso  $h(t)$ , il che mostra l'interesse dello studio della trasformata di Fourier per l'analisi dei sistemi LTI.

## 2.4 Serie di Fourier

Nel precedente capitolo abbiamo introdotto, nell'ambito dello studio di sistemi LTI, la rappresentazione di segnali come combinazione lineare di impulsi opportunamente traslati. In questa sezione esploriamo una rappresentazione alternativa (ristretta qui a segnali periodici ed estesa a quelli non periodici nella prossima sezione) basata sulla combinazione lineare di segnali esponenziali complessi.

A tal proposito si considerino le funzioni

$$e^{in\omega_0 t} = e^{in\frac{2\pi}{T}t}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

aventi come frequenza fondamentale  $n\omega_0$  e quindi con periodo  $T = \frac{2\pi}{n\omega_0}$ . Sotto condizioni di regolarità (note come condizioni di Dirichlet, esposte alla fine della sezione) che sono verificate per la maggior parte dei segnali di interesse pratico, è possibile mostrare che una funzione  $f(t)$  periodica di periodo  $T$ , può essere ottenuta combinando linearmente le funzioni  $e^{in\omega_0 t}$  ( $-\infty < n < \infty$ ):

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega_0 t}, \quad \text{dove} \quad c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt. \quad (2.4)$$

La serie precedente è detta sviluppo in *serie di Fourier* di  $f(t)$  e il coefficiente  $c_n$  è detto *coefficiente di Fourier*; i termini corrispondenti a  $n = \pm 1$ , entrambi con frequenza  $\omega_0$ , sono detti *prime armoniche*, quelli corrispondenti a  $n = \pm k$  sono detti *k-esime armoniche*. Si osservi che  $c_0 = \frac{1}{T} \int_{T/2}^{T/2} f(t) dt$  è la media temporale del segnale relativo a un periodo.

Presentiamo ora alcune forme alternative per la serie di Fourier, utili soprattutto per segnali  $f(t)$  a valori reali. Se  $f(t)$  è reale, il coefficiente generale  $c_n$  è complesso ed è uguale al coniugato di  $c_{-n}$ , cioè  $c_n = \bar{c}_{-n}$ . Questo fatto ci consente di derivare una forma alternativa della serie di Fourier che spesso sostituisce quella espressa dall'equazione (2.4). Infatti, riarrangiando la somma nella (2.4) e sostituendo  $c_{-n}$  con  $\bar{c}_n$  otteniamo:

$$\begin{aligned} f(t) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [c_n e^{in\omega_0 t} + c_{-n} e^{-in\omega_0 t}] \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [c_n e^{in\omega_0 t} + \bar{c}_n e^{-in\omega_0 t}] \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [c_n e^{in\omega_0 t} + \overline{c_n e^{in\omega_0 t}}] \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \{ c_n e^{in\omega_0 t} \}. \end{aligned}$$

Se esprimiamo  $c_n$  in forma polare come  $c_n = r_n e^{i\theta_n}$ , la precedente equazione diventa:

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \{ r_n e^{i(n\omega_0 t + \theta_n)} \} = c_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n). \quad (2.5)$$

L'equazione (2.5) è nota come *forma trigonometrica combinata* della serie di Fourier.

Un'altra forma utile è ottenuta riscrivendo  $c_n$  in forma algebrica  $c_n = a_n - ib_n$ , con  $a_n$  e  $b_n$  reali. Ricordando che  $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ , la (2.5) assume la forma

$$f(t) = c_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)]. \quad (2.6)$$

L'equazione (2.6) rappresenta la serie di Fourier in *forma trigonometrica* e coincide con la formulazione originale di Fourier che scrisse per l'appunto in termini di somme di seni e coseni.

#### Esempio 2.4.1.

Si consideri il seguente segnale periodico di periodo  $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ :

$$f(t) = 10 + 3 \cos \omega_0 t + 5 \cos(2\omega_0 t + \frac{\pi}{6}) + 4 \sin 3\omega_0 t.$$

Sostituendo i seni e i coseni con le esponenziali complesse:

$$f(t) = 10 + \frac{3}{2} [e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}] + \frac{5}{2} [e^{i(2\omega_0 t + \frac{\pi}{6})} + e^{-i(2\omega_0 t + \frac{\pi}{6})}] + \frac{4}{2i} [e^{i3\omega_0 t} - e^{-i3\omega_0 t}]$$

o, equivalentemente:

$$f(t) = 10 + \frac{3}{2} e^{i\omega_0 t} + \frac{3}{2} e^{-i\omega_0 t} + \frac{5}{2} e^{i\frac{\pi}{6}} e^{i2\omega_0 t} + \frac{5}{2} e^{-i\frac{\pi}{6}} e^{-i2\omega_0 t} - 2ie^{i3\omega_0 t} + 2ie^{-i3\omega_0 t}$$

I coefficienti della serie di Fourier per il segnale  $f(t)$  sono dunque:

$$\begin{aligned} c_0 &= 10, & c_1 &= c_{-1} = \frac{3}{2}, & c_2 &= \frac{5}{2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \right), \\ c_{-2} &= \frac{5}{2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} \right), & c_3 &= -c_{-3} = -2i. \end{aligned}$$

Tutti gli altri coefficienti risultano nulli.

#### Esempio 2.4.2.

Un segnale che riveste un'importanza notevole nei computer digitali (segnale di clock) è il *treno di impulsi rettangolari*. Dato  $T_1 < \frac{T}{2}$ , l'onda rettangolare di periodo  $T$  è definita come segue:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & T_1 < |t| < T/2 \end{cases}$$

il cui grafico è rappresentato nella Figura 2.4.

La sua frequenza è  $\omega_0 = 2\pi/T$ . Per determinare i coefficienti della serie di Fourier di  $f(t)$  consideriamo l'intervallo  $-T/2 \leq t \leq T/2$  ed eseguiamo l'integrazione come indicato nella (2.4). Per  $n = 0$  abbiamo

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{-T_1}^{T_1} dt = \frac{2T_1}{T}.$$

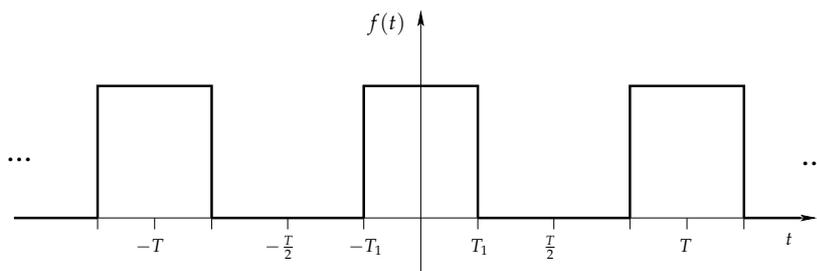


Figura 2.4 Treno di impulsi rettangolari.

Per  $n \neq 0$  invece otteniamo

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T_1}^{T_1} e^{-in\omega_0 t} dt = -\frac{1}{in\omega_0 T} e^{-in\omega_0 t} \Big|_{-T_1}^{T_1} \\
 &= \frac{1}{in\omega_0 T} \left( e^{in\omega_0 T_1} - e^{-in\omega_0 T_1} \right) \\
 &= \frac{2 \sin(n\omega_0 T_1)}{n\omega_0 T} = \frac{\sin(n\omega_0 T_1)}{n\pi} \quad (\text{poiché } \omega_0 T = 2\pi).
 \end{aligned}$$

## Spettro di Frequenza

Ogni segnale periodico ha una propria “identità” caratterizzata dalle armoniche costituenti la serie di Fourier associata: si parla in questo caso di *spettro di frequenza*. Lo spettro di frequenza di un segnale viene spesso mostrato mediante un grafico che illustra, per ogni coefficiente della serie  $c_n = |c_n|e^{i\theta_n}$ , l’ampiezza o il modulo  $|c_n|$  e la fase  $\theta_n$ .

Per esempio, per mostrare lo spettro di frequenza del treno di impulsi rettangolari descritto sopra, è utile introdurre una funzione continua che fornisce l’involuppo del modulo dei coefficienti, ossia la funzione sinc definita come:

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

Essa assume il valore unitario in  $x = 0$  (che si ricava dal limite notevole  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ ) e zero in corrispondenza dei multipli positivi e negativi di  $\pi$ ,  $x = \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$ . La fase è invece nulla per valori positivi della funzione e  $\pi$  (o  $-\pi$ ) per valori negativi. I grafici del modulo e della fase della sinc sono riportati in Figura 2.5

Lo spettro di frequenza dei coefficienti della serie che esprime il treno di impulsi rettangolari di periodo  $T$  dell’esempio precedente è rappresentato nella Figura 2.6. Nella figura è rappresentato anche l’involuppo del modulo dei coefficienti dato dalla funzione

$$\text{involuppo} = \frac{2T_1}{T} \text{sinc}(\omega T_1),$$

dove  $\omega$  sostituisce  $n\omega_0$ .

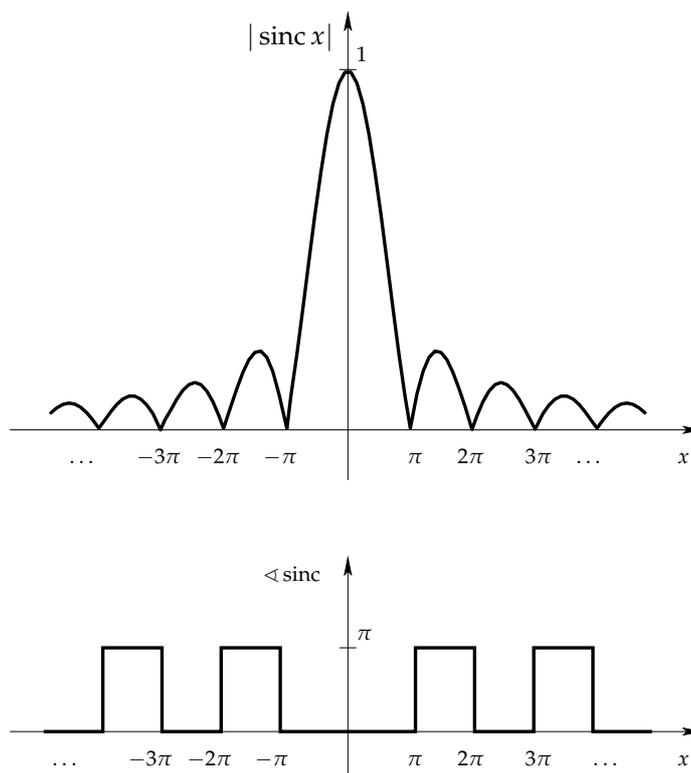


Figura 2.5 Modulo e fase della funzione sinc.

### Proprietà della Serie di Fourier

La prima osservazione da fare concerne la caratterizzazione della famiglia di funzioni che ammettono una rappresentazione come serie di Fourier: a questo riguardo si può asserire che ogni funzione  $f_T(t)$  periodica di periodo  $T$  che soddisfa le *condizioni di Dirichlet* può essere espansa in serie di Fourier. Tali requisiti sono:

1.  $f_T(t)$  deve avere al più un numero finito di discontinuità nel periodo;
2.  $f_T(t)$  deve avere al più un numero finito di massimi e minimi nel periodo;
3.  $f_T(t)$  deve essere limitata, e per includere le funzioni impulsive, tale richiesta viene estesa a quella di assoluta integrabilità per la funzione, ossia:

$$\int_T |f_T(t)| dt < +\infty.$$

Per ogni funzione  $f(t)$  che rispetta le condizioni di Dirichlet, le seguenti asserzioni risultano vere.

1. La serie di Fourier converge ai valori della funzione in ogni punto  $p$  di continuità indipendentemente dai valori assunti dalla derivata destra e dalla derivata sinistra nel punto, quindi anche nel caso in cui le derivate differiscono, cioè  $f'(p^-) \neq f'(p^+)$ .

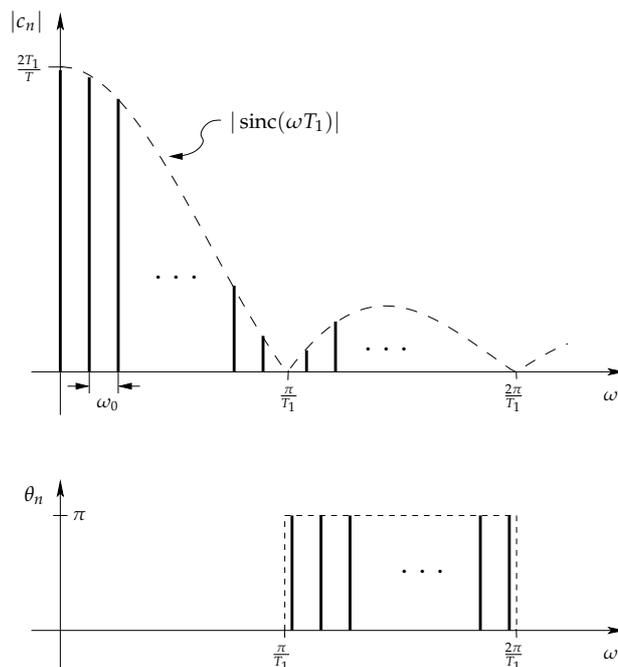


Figura 2.6 Spettro dell'onda rettangolare di periodo  $T$ .

2. Se la funzione ha una discontinuità in un punto  $p$ , la serie converge al valor medio del limite sinistro e limite destro della funzione in quel punto, cioè

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega_0 t} = \frac{f(p^-) + f(p^+)}{2}.$$

3. Un problema interessante, con ricaduta in particolare sul piano applicativo, è quello di valutare il grado di approssimazione della funzione  $f(t)$  introdotto dalla restrizione del numero di infiniti termini della serie ad un numero finito di componenti armoniche, cioè alla somma parziale:

$$S_N(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{in\omega_0 t}.$$

Lo studio della qualità dell'approssimazione è ridotto allora allo studio della convergenza nelle serie di Fourier. Senza fare una trattazione matematica rigorosa, diremo semplicemente che un fenomeno studiato in questa teoria (noto come fenomeno di Gibbs) è quello per cui in presenza di discontinuità, la successione delle somme parziali converge in ogni punto, ma non uniformemente. Ad esempio, nella Figura 2.7 viene illustrata la convergenza alla serie  $S(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r_n e^{int}$ , dove  $S(t)$  è una funzione periodica di periodo  $2\pi$  definita come:

$$S(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 1 \\ 0, & 1 < |t| < \pi \end{cases}.$$

Come si nota dalla figura, esiste un valore  $\delta > 0$  tale che, per ogni  $N$ :

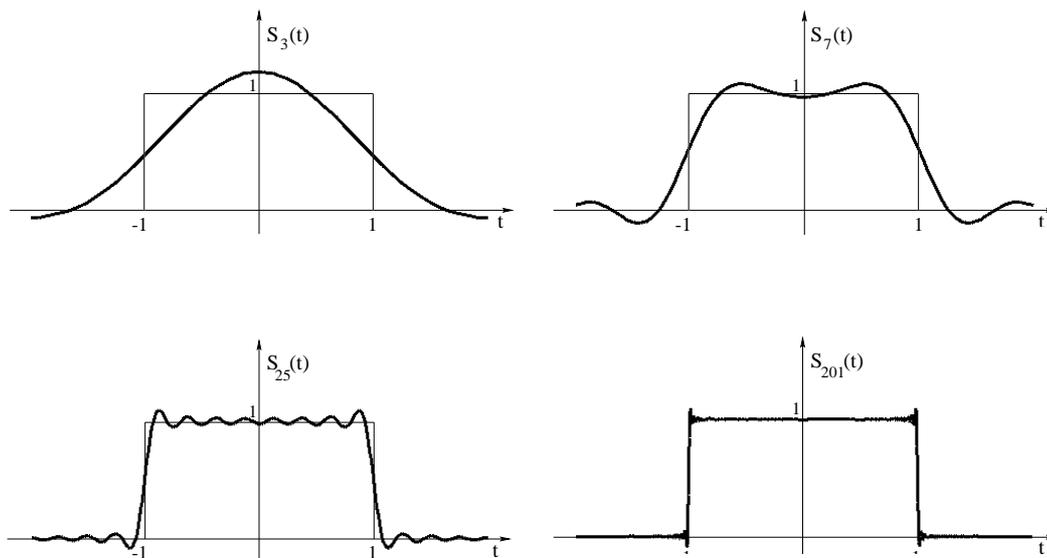


Figura 2.7 Convergenza della serie di Fourier e fenomeno di Gibbs.

$$\sup_{-\pi < t < \pi} |S(t) - S_N(t)| \geq \delta.$$

Si osservi dalla stessa figura che i punti  $t_N$ , per cui  $|S(t_N) - S_N(t_N)| \approx \delta$ , per  $N$  grande sono prossimi ai punti di discontinuità di  $S(t)$ .

4. In relazione alla proprietà precedente, se denotiamo con

$$e(t) = f(t) - S_N(t)$$

l'errore di approssimazione introdotto dalla somma parziale  $S_N(t)$ , allora è possibile dimostrare che la scelta dei coefficienti di Fourier  $c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt$  rappresentano per la serie armonica la miglior scelta in termini di minimizzazione dello scarto quadratico medio (MSE):

$$\text{MSE} = \int_T |e(t)|^2 dt.$$

## 2.5 Trasformata di Fourier

In questa sezione si affronta il problema di rappresentare mediante funzioni trigonometriche segnali *non periodici*; e poiché è intuibile che essi non possono essere ottenuti come sovrapposizione di funzioni con frequenza multipla di una frequenza data (da cui si possono generare solo segnali periodici) ci si affida ad un procedimento più sofisticato noto come la teoria della *trasformata di Fourier*. Rispetto alle serie di Fourier è qui richiesto un approccio più generale e alcune modifiche sostanziali:

- occorre integrare su tutti i tempi da  $-\infty$  a  $+\infty$  anziché su un intervallo limitato e conseguentemente, dalle medie integrali relative alle diverse armoniche adesso si deve passare agli integrali;

- per rappresentare il segnale occorre un “continuo” di armoniche e non una famiglia discreta delle stesse, con conseguente sviluppo integrale in luogo a sviluppo in serie.

Sulla base di tali osservazioni, la trasformata di Fourier può essere vista come limite di una serie di Fourier applicabile a funzioni non periodiche di cui, nel seguito, ci apprestiamo a dare una giustificazione matematica.

A questo riguardo si consideri una funzione  $f(t)$  e si denoti con  $f_T(t)$  la funzione periodica di periodo  $T$  che coincide con  $f(t)$  nell'intervallo  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ ; possiamo allora scrivere:

$$f(t) = \lim_{T \rightarrow +\infty} f_T(t).$$

Un esempio è dato nella Figura 2.8(a), in cui la funzione  $f_T(t)$  è rappresentata da un treno di impulsi rettangolari di periodo  $T$  e ampiezza dell'impulso  $2T_1$ , che richiama quella mostrata nell'Esempio 2.4.2. Nella stessa figura 2.8-(c) è mostrata anche la funzione  $f(t)$ .

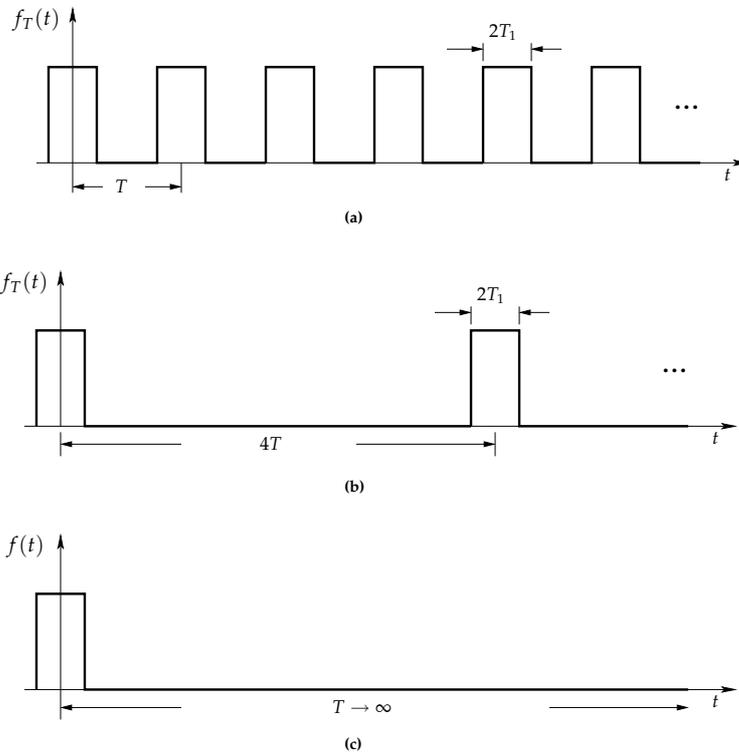


Figura 2.8 Funzione impulso rettangolare con periodo che tende all'infinito.

Posto ora  $\omega_n = n \frac{2\pi}{T}$  e  $\Delta\omega_n = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{2\pi}{T}$ , per la (2.4) vale:

$$f_T(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c'_n e^{i\omega_n t} \Delta\omega_n, \quad \text{dove} \quad c'_n = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) e^{-i\omega_n t} dt$$

Passando al limite, si ha  $\lim_{T \rightarrow +\infty} \Delta\omega_n = d\omega$  e  $\lim_{T \rightarrow +\infty} \omega_n = \omega$ , da cui:

$$f(t) = \lim_{T \rightarrow +\infty} f_T(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\omega t} d\omega \quad \text{dove} \quad c_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

Posto  $F(\omega) = c_n$ , concludiamo

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad \text{dove} \quad F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (2.7)$$

Questo processo di dilatazione del periodo rendendo la frequenza infinitesimale e tale che la funzione  $f(t)$  non sia mai ripetuta, è rappresentata in Figura 2.8.

La coppia di funzioni  $F(\omega)$  e  $f(t)$  date nella (2.7) vengono chiamate rispettivamente *trasformata di Fourier* e *antitrasformata di Fourier* (o *trasformata inversa di Fourier*), e vengono denotate rispettivamente con  $\mathcal{F}\{f(t)\}$  e  $\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\}$ . Inoltre la (2.7) mostra che la corrispondenza

$$f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)$$

è una corrispondenza biunivoca e lineare.

Come per la serie di Fourier, la trasformata di Fourier  $F(\omega)$  viene anche chiamata *spettro* del segnale  $f(t)$ ; lo spettro del segnale è quindi individuato dal suo modulo  $|F(\omega)|$  e dalla sua fase  $\angle F(\omega)$ . Il *supporto* dello spettro  $F(\omega)$  è dato dall'insieme  $\{\omega : F(\omega) \neq 0\}$ ; osserviamo che segnali i cui spettri hanno supporti disgiunti sono univocamente ricostruibili dalla loro somma, come mostrato chiaramente in Figura 2.9.

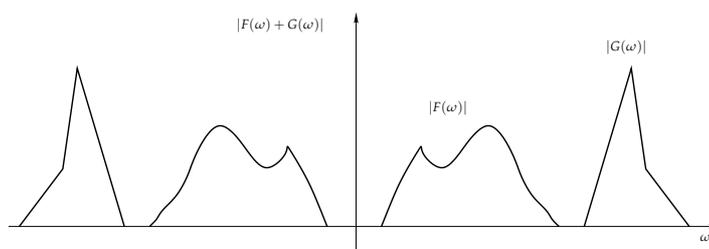


Figura 2.9 Segnali aventi spettri disgiunti.

Risultano inoltre di particolare interesse segnali a supporto limitato, detti anche a banda limitata: un segnale  $f(t)$  è detto a *banda limitata* dalla frequenza  $W$  se per  $|\omega| > W$  risulta  $F(\omega) = 0$ .

#### Esempio 2.5.1.

I segnali utilizzati in una normale conversazione telefonica possono essere ritenuti a banda limitata a 4kHz.

La rappresentazione per  $f(t)$  data nella (2.7) gioca per i segnali aperiodici un ruolo analogo alla rappresentazione data nella (2.4) per quelli periodici, poiché entrambe esprimono il segnale come combinazione lineare di esponenziali complessi. Per i segnali periodici, questi esponenziali complessi sono pesati con "ampiezza"  $c_n$  e sono definiti per valori discreti di frequenze  $n\omega_0$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Per segnali aperiodici, gli esponenziali complessi sono definiti su un continuo delle frequenze e sono pesati con "ampiezza" pari a  $F(\omega)d\omega/2\pi$ .

**Esempio 2.5.2.**

Per apprezzare il significato fisico della coppia trasformata-antitrasformata di Fourier, riprendiamo l'esempio dell'impulso rettangolare di Figura 2.8. A questo riguardo si consideri l'espansione in serie di Fourier dell'onda rettangolare periodica mostrata nell'Esempio 2.4.2.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{2T_1}{T} \operatorname{sinc}(n\omega_0 T_1) e^{in\omega_0 t}$$

L'ampiezza di ogni armonica varia in relazione all'ampiezza della frequenza e l'insieme di valori è limitato da una funzione  $\operatorname{sinc}(\omega T_1)$ , come mostrato in Figura 2.10(a). L'effetto di aumentare il periodo (quadruplicandolo) è invece mostrato in 2.10(b), causando una maggiore concentrazione dello spettro di frequenza, ben visibile sull'asse delle frequenze, poiché  $\Delta\omega_n = \omega_0$  diminuisce. Per  $T \rightarrow \infty$  la separazione diviene infinitesimale e  $\Delta\omega_n$  diventa  $d\omega$ , trasformando la sommatoria in integrazione e lo spettro in un continuo rappresentato dalla curva continua in 2.10(c).

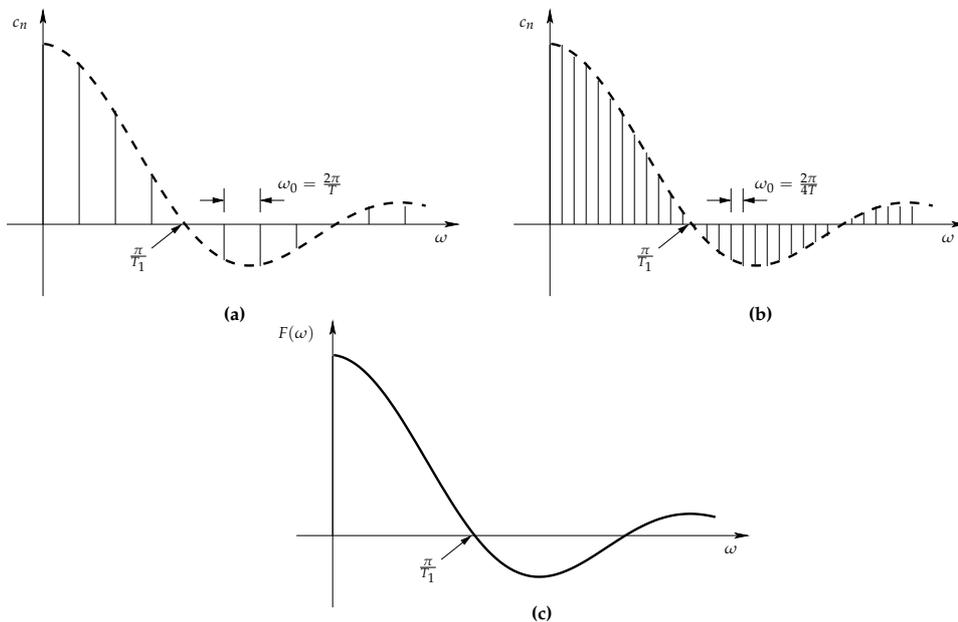


Figura 2.10 Spettro di frequenza per l'impulso rettangolare aperiodico.

**Esempio 2.5.3.**

Si consideri il segnale

$$f(t) = e^{-at} u(t), \quad a > 0.$$

Dalla (2.7) si ha che la trasformata di Fourier di  $f(t)$  è

$$F(\omega) = \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-i\omega t} dt = -\frac{1}{a+i\omega} e^{-(a+i\omega)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a+i\omega}, \quad a > 0.$$

Poiché questa trasformata è a valori complessi,  $F(\omega)$  può essere rappresentata mediante due grafici, rispettivamente del suo modulo e della sua fase, (Figura 2.11), in cui

modulo e fase sono dati da:

$$|F(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}, \quad \angle F(\omega) = -\arctan \frac{\omega}{a}.$$

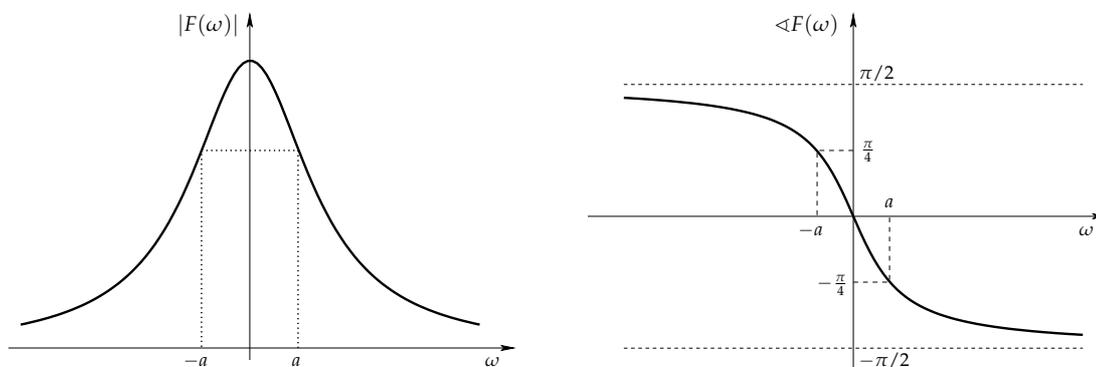


Figura 2.11 Modulo e fase della trasformata di Fourier di  $f(t) = e^{-at}u(t)$ ,  $a > 0$ .

Lo spettro continuo di Figura 2.8 è la rappresentazione grafica della trasformata di Fourier di un singolo impulso rettangolare di durata  $T = 2T_1$  e ampiezza unitaria (nella trattazione precedente è stato considerato anche come segnale periodico di periodo infinito). La grande importanza che riveste questo tipo di segnale è legata all'uso che ne viene fatto nei sistemi di elaborazione digitali e nel mondo delle telecomunicazioni se si pensa che il digit "1" o l'impulso radar (per fare solo due esempi) vengono approssimati da un impulso rettangolare di durata finita e ampiezza fissata.

Matematicamente, se consideriamo il segnale impulso rettangolare di durata  $T$  e ampiezza  $V$ , e lo esprimiamo in termini di segnale rettangolare (definito nell'Esempio 1.2.1), cioè

$$f(t) = V \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} V, & \text{se } |t| < \frac{T}{2} \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ricaviamo la sua trasformata come segue

$$F(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} V e^{-i\omega t} dt = \frac{TV}{\omega T/2} \left[ \frac{e^{i\omega T/2} - e^{-i\omega T/2}}{2i} \right] = TV \operatorname{sinc}(\omega T/2),$$

che, ponendo  $V = 1$ , dà luogo alla nota coppia:

$$\operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} T \operatorname{sinc}(\omega T/2). \quad (2.8)$$

Si osservi che in questo caso la trasformata è una funzione reale, cosa non vera in generale visto che la trasformata di Fourier è una funzione a valori complessi. La Figura 2.12 riporta il grafico della coppia trasformata e antitrasformata dell'impulso rettangolare.

Il seguente programma Matlab mette in evidenza il comportamento duale che esiste tra tempo e frequenza: a fronte di una maggiore "concentrazione" nel tempo si ha una maggiore "dilatazione" nelle frequenze e viceversa, maggiore è la "concentrazione" nelle

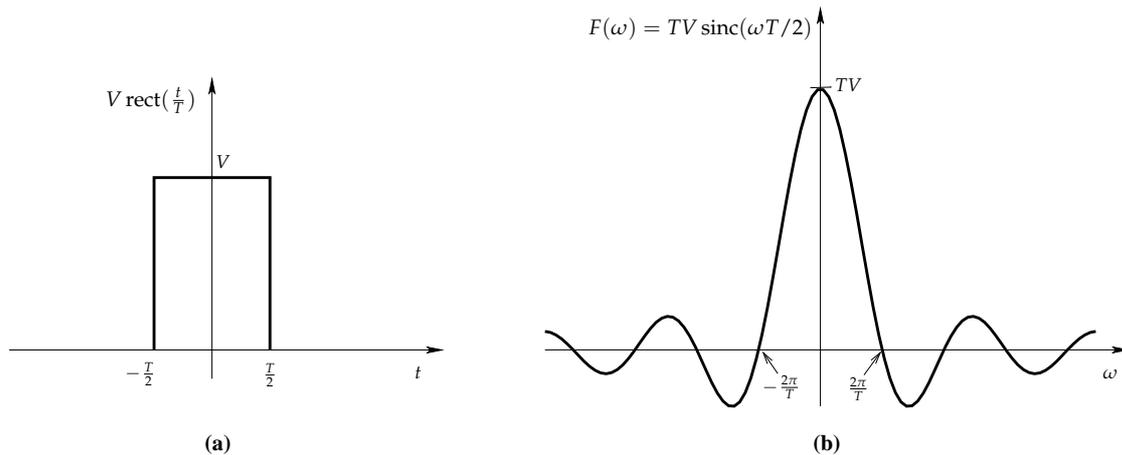


Figura 2.12 (a) Il segnale impulso rettangolare. (b) La sua trasformata di Fourier.

frequenze, maggiore è la “dilatazione” nel tempo. Per illustrare questa attitudine il programma confronta lo spettro di due impulsi rettangolari di durata diversa e in particolare, nella Figura 2.13 è riportato lo spettro di due impulsi in cui la durata del secondo è dieci volte la durata del primo.

MATLAB

```
function fft_rect(T1,T2)
% Confronta la trasformata di Fourier di due impulsi rettangolari distinti
% T1: durata del primo impulso - T2: durata del secondo impulso
%-----
tmax = max([T1 T2]);
dt = 2*tmax/1000;
t = -tmax:dt:tmax;
p1 = zeros(size(t));
p2 = zeros(size(t));
w1 = T1/dt;
w2 = T2/dt;
for n = 501-round(w1/2):501+round(w1/2)
    p1(n) = 1;
end
for n = 501-round(w2/2):501+round(w2/2)
    p2(n) = 1;
end
% Calcolo della trasformata approssimata
F1 = fft(p1);
F2 = fft(p2);
% Vettore delle frequenze
wlim = round(3*1001*dt/min([T1 T2]));
w = (2*pi/(1001*dt))*[-wlim:1:wlim];
P1 = zeros(size(w));
P2 = zeros(size(w));
mid = fix(length(w)/2);
% Shift della trasformata
for n = 1:mid;
```

```

P1(n+mid) = F1(n);
P2(n+mid) = F2(n);
P1(mid+1-n) = F1(n);
P2(mid+1-n) = F2(n);
end
% Riscalatura e plot
subplot(2,2,1), plot(t,p1); xlabel('Tempo (s)'); title(['Impulso (durata ',num2str(T1),' sec)']);
subplot(2,2,3), plot(t,p2,'r'); xlabel('Tempo (s)'); title(['Impulso (durata ',num2str(T2),' sec)']);
P1p = dt*abs(P1);
P2p = dt*abs(P2);
subplot(2,2,2), plot(w,P1p); xlabel('Frequenze (rad/s)'); title('Spettro');
subplot(2,2,4), plot(w,P2p,'r'); xlabel('Frequenze (rad/s)'); title('Spettro')

```

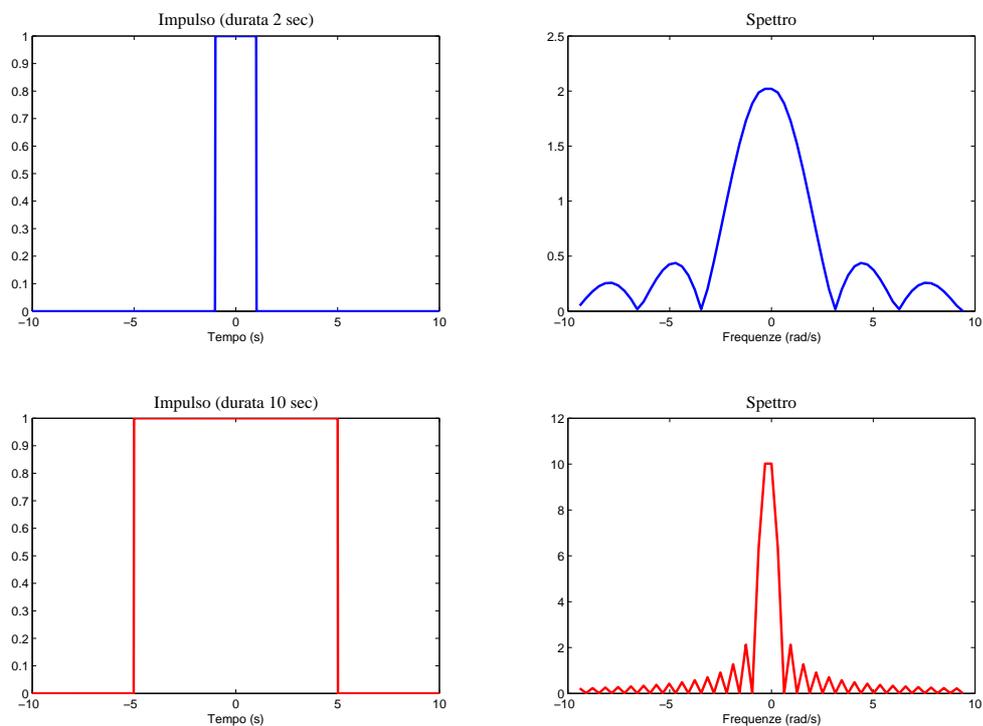


Figura 2.13 Confronto tra spettri di due impulsi aventi durata, rispettivamente, 10 sec e 100 sec.

### 2.5.1 Esistenza della Trasformata di Fourier

Nella sezione precedente abbiamo ottenuto l'equazione generale della trasformata di Fourier e della sua inversa; qui ci proponiamo di discutere brevemente sotto quali condizioni tale trasformata esista.

In generale, perchè la trasformata di un dato segnale  $f(t)$  esista, deve esistere ed essere finito per ogni  $t$  il valore:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt.$$

L'insieme di condizioni *sufficienti* per l'esistenza della trasformata di Fourier sono simili a quelle date per la serie di Fourier e note come le *condizioni di Dirichlet*, elencate di seguito:

1.  $f(t)$  deve essere limitato, cioè deve esistere una costante positiva  $M$  tale che:

$$|f(t)| \leq M \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \text{in particolare} \quad \sup_{\mathbb{R}} |f| \leq M;$$

2.  $f(t)$  deve avere un numero finito di minimi e di massimi;
3.  $f(t)$  deve avere un numero finito di discontinuità;
4.  $f(t)$  deve essere assolutamente integrabile, cioè

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < +\infty.$$

In particolare, per quanto riguarda la terza condizione si deve aggiungere che nei punti di discontinuità in cui il limite destro ed il limite sinistro della  $f(t)$  sono diversi, la trasformata inversa converge al valore medio dei due limiti stessi.

Si noti che quelle di Dirichlet rappresentano condizioni sufficienti e non necessarie, altrimenti molti segnali importanti non ammetterebbero trasformata di Fourier. Infatti, tutte le funzioni di interesse pratico che considereremo di seguito soddisfano le condizioni 1, 2 e 3 sopra citate. Utilizzeremo invece spesso funzioni (o funzioni generalizzate) che non verificano l'ultima condizione, pur avendo trasformata di Fourier. Alcuni importanti esempi sono riportati di seguito.

#### Esempio 2.5.4.

In questo esempio calcoliamo la trasformata di Fourier della delta di Dirac  $f(t) = \delta(t - t_0)$  (introdotta nella Sezione 1.2.1) e la trasformata di Fourier del segnale costante  $f(t) = 1$ . Si osservi che in quest'ultimo caso l'ultima condizione di Dirichlet non è verificata.

Ricordando che, se  $f(t)$  è una funzione continua in  $t_0$ , allora vale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t - t_0)dt = f(t_0),$$

possiamo concludere che:

$$\mathcal{F} \{ \delta(t - t_0) \} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) e^{-i\omega t} dt = e^{-i\omega t} \Big|_{t=t_0} = e^{-i\omega t_0}$$

da cui si ricava la nota coppia di trasformate

$$\delta(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 1. \quad (2.9)$$

Se d'altro lato si considera l'impulso nel dominio delle frequenze  $\delta(\omega - \omega_0)$ , antitrasformando si ricava

$$\mathcal{F}^{-1} \{ \delta(\omega - \omega_0) \} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \omega_0) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} e^{i\omega_0 t},$$

quindi

$$e^{i\omega_0 t} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

e di conseguenza per  $\omega_0 = 0$

$$1 \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(\omega). \quad (2.10)$$

**Esempio 2.5.5.**

Un notevole esempio di segnale molto usato nei sistemi di comunicazione è il segnale *signum*, denotato da  $\text{sgn}$  e definita come segue:

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & \text{per } t > 0 \\ 0, & \text{per } t = 0 \\ -1, & \text{per } t < 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

Anche in questo caso la funzione non è assolutamente integrabile, quindi occorre trovare un diverso metodo di integrazione per calcolarne la trasformata. A tal riguardo si consideri la seguente uguaglianza di facile verifica:

$$\text{sgn}(t) = \lim_{a \rightarrow 0} e^{-a|t|} \text{sgn}(t).$$

La sua trasformata di Fourier risulta pertanto essere:

$$\mathcal{F} \{ \text{sgn}(t) \} = \mathcal{F} \left\{ \lim_{a \rightarrow 0} e^{-a|t|} \text{sgn}(t) \right\} = \lim_{a \rightarrow 0} \mathcal{F} \left\{ e^{-a|t|} \text{sgn}(t) \right\},$$

in cui l'operazione di limite e di integrazione sono stati scambiati senza dare una giustificazione matematica precisa. Poiché:

$$\mathcal{F} \left\{ e^{-a|t|} \text{sgn}(t) \right\} = - \int_{-\infty}^0 e^{(a-i\omega)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-(a+i\omega)t} dt = -\frac{1}{a-i\omega} + \frac{1}{a+i\omega},$$

Possiamo quindi concludere che:

$$\mathcal{F} \{ \text{sgn}(t) \} = \lim_{a \rightarrow 0} -\frac{1}{a-i\omega} + \frac{1}{a+i\omega} = \frac{2}{i\omega}. \quad (2.12)$$

**Esempio 2.5.6.**

Un'altro importante segnale, legato al segnale *signum* da una semplice trasformazione, è il gradino unitario  $u(t)$ , definita nell'Esempio 1.3.18. Infatti essa può essere scritta come:

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sgn}(t),$$

da cui otteniamo la sua trasformata di Fourier:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \{ u(t) \} &= \frac{1}{2} \mathcal{F} \{ 1 \} + \frac{1}{2} \mathcal{F} \{ \text{sgn}(t) \} && \text{(per la linearità)} \\ &= \pi \delta(\omega) + \frac{1}{i\omega}. \end{aligned}$$

**2.5.2 Energia di un Segnale e Relazione di Parseval**

Dato un segnale  $f(t)$ , in generale complesso, si definisce *potenza istantanea* (in senso lato) la funzione

$$p(t) = f(t) \bar{f}(t) = |f(t)|^2$$

da cui deriva la definizione di *potenza media*

$$P = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt \quad (2.13)$$

ed *energia* del segnale

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt. \quad (2.14)$$

Si osservi che un segnale che soddisfa la condizione  $E < +\infty$ , soddisfa anche la condizione di assoluta integrabilità (posta alla fine della sezione precedente per l'esistenza della trasformata di Fourier) e viene definito a *energia finita*. Esempi di segnali a energia finita sono i segnali non periodici a durata (supporto) limitata, come l'impulso rettangolare, e segnali che tendono asintoticamente a zero quando  $t$  tende a infinito, come il segnale  $f(t) = e^{-at}u(t)$ , per  $a > 0$ .

Un segnale si definisce a *potenza finita* nel caso in cui converga, ad un valore diverso da zero, l'integrale della (2.13) e quindi  $P < +\infty$ . Si noti che per un segnale a energia finita la potenza risulta nulla, pertanto detto segnale non può appartenere ad entrambe le categorie. Segnali quali il gradino unitario (1.1), la funzione signum (2.11) e le funzioni periodiche che rispettano le condizioni di Dirichlet, eccetto l'assoluta integrabilità, sono segnali a potenza finita benché l'energia sia infinita. Esistono inoltre segnali che non possiedono né energia né potenza finita, come il segnale  $f(t) = e^{-at}$ .

Una caratteristica spettrale che contraddistingue i segnali a potenza finita da quelli a energia finita è che i primi hanno nel loro spettro la funzione impulsiva (delta di Dirac) mentre i secondi no (rivedere gli esempi 2.5.3, 2.5.4 e 2.5.6).

Un risultato che mette in relazione l'energia di un segnale e la sua trasformata di Fourier è data dal seguente:

**Fatto 2.1** (Teorema di Parseval). *Se  $f(t)$  è un segnale continuo e  $F(\omega)$  la sua trasformata di Fourier, allora:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega. \quad (2.15)$$

*Dimostrazione.* La relazione (2.15) segue dalla diretta applicazione della definizione di trasformata di Fourier. Infatti:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\bar{f}(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{F}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \right] dt.$$

Invertendo l'ordine di integrazione si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{F}(\omega) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right] d\omega.$$

Il termine tra parentesi quadre è la trasformata di Fourier di  $f(t)$ , quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega.$$

□

A causa della relazione di Parseval risulta dunque che l'energia del segnale  $f(t)$

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega.$$

Possiamo allora attribuire al quadrato del modulo della trasformata di Fourier il seguente significato:  $\frac{1}{2\pi} |F(\omega)|^2 d\omega$  è il contributo all'energia del segnale offerto dalle sue componenti con frequenza compresa tra  $\omega$  e  $\omega + d\omega$ .

### 2.5.3 Trasformata di Fourier di Funzioni Reali

La trasformata di Fourier  $F(\omega)$  di un segnale reale  $f(t)$  è in generale complessa. Come mostrato nell'esempio 2.5.3, per visualizzare graficamente  $F(\omega)$  è allora necessario considerare separatamente il modulo  $|F(\omega)|$  e la fase  $\angle F(\omega)$  della trasformata, le cui espressioni analitiche sono mostrate di seguito:

$$|F(\omega)| = \sqrt{(\operatorname{Re}\{F(\omega)\})^2 + (\operatorname{Im}\{F(\omega)\})^2},$$

$$\angle F(\omega) = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}\{F(\omega)\}}{\operatorname{Re}\{F(\omega)\}}\right).$$

Dato un segnale reale  $f(t)$  che ammette  $F(\omega)$  come trasformata, a causa dell'identità  $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$ , la parte reale  $\operatorname{Re}\{F(\omega)\}$  e la parte immaginaria  $\operatorname{Im}\{F(\omega)\}$  sono rispettivamente:

$$\operatorname{Re}\{F(\omega)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(\omega t) dt, \quad \operatorname{Im}\{F(\omega)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(\omega t) dt.$$

Poiché la funzione coseno è pari e la funzione seno è dispari, si ha che:

$$\operatorname{Re}\{F(\omega)\} = \operatorname{Re}\{F(-\omega)\}, \quad \operatorname{Im}\{F(\omega)\} = -\operatorname{Im}\{F(-\omega)\}.$$

Vale di conseguenza che:

$$|F(\omega)| = |F(-\omega)|, \quad \angle F(\omega) = -\angle F(-\omega).$$

Ne consegue che per funzioni reali il modulo della trasformata  $|F(\omega)|$  è una funzione pari e la fase  $\angle F(\omega)$  è una funzione dispari. In Figura 2.14 è mostrato un tipico esempio del modulo e della fase della trasformata di una funzione reale (si veda anche l'Esempio 2.5.3).

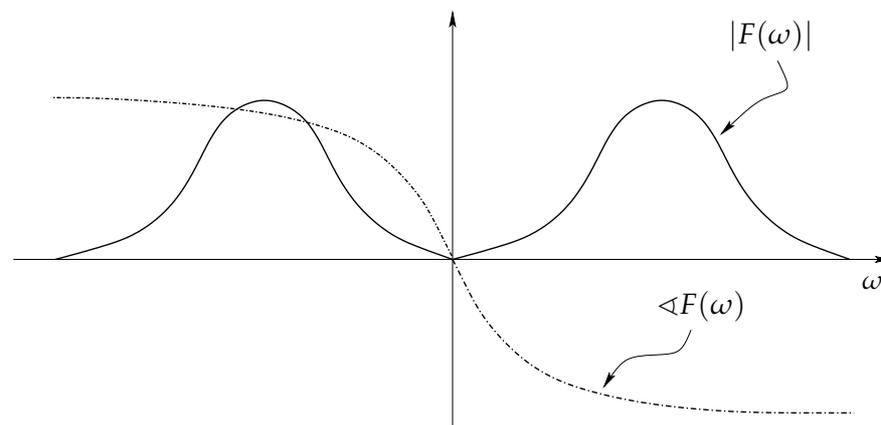


Figura 2.14 Modulo e fase della trasformata di Fourier di un segnale  $f(t)$  reale.

### 2.5.4 Proprietà della Trasformata di Fourier

Nella Tabella 2.1 vengono riportate le principali proprietà delle trasformate di Fourier il cui contributo principale, oltre a favorire in molti casi la semplificazione dell'analisi di sistemi

complessi, è quello di aiutare a comprendere meglio la relazione tra dominio del tempo e dominio delle frequenze dei segnali.

Di seguito viene proposta la giustificazione di alcune proprietà delle trasformate e ne viene mostrato l'impiego in alcuni esempi, rimandando a una letteratura più specializzata le dimostrazioni matematiche formali.

Tabella 2.1 Proprietà delle Trasformate di Fourier.

Proprietà	$\mathbf{f(t)}$	$\leftrightarrow$	$\mathbf{F(\omega)}$
Linearità	$af(t) + bg(t)$		$aF(\omega) + bG(\omega)$
Dualità (simmetria)	$F(t)$		$2\pi f(-\omega)$
Coniugazione	$\bar{f}(t)$		$\bar{F}(-\omega)$
Traslazione (tempo)	$f(t - t_0)$		$e^{-i\omega t_0} F(\omega)$
Traslazione (frequenza)	$e^{i\omega_0 t} f(t)$		$F(\omega - \omega_0)$
Convoluzione (tempo)	$f(t) * g(t)$		$F(\omega)G(\omega)$
Convoluzione (frequenza)	$f(t)g(t)$		$\frac{1}{2\pi} F(\omega) * G(\omega)$
Modulazione	$f(t) \cos \omega_0 t$		$\frac{1}{2} [F(\omega + \omega_0) + F(\omega - \omega_0)]$
Scalatura	$f(at)$		$\frac{1}{ a } F\left(\frac{\omega}{a}\right)$
Differenziazione (tempo)	$\frac{d^n}{dt^n} f(t)$		$(i\omega)^n F(\omega)$
Differenziazione (frequenza)	$(-i\omega)^n f(t)$		$\frac{d^n}{d\omega^n} F(\omega)$
Integrazione (tempo)	$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$		$\frac{1}{i\omega} F(\omega) + \pi F(0)\delta(\omega)$

### Linearità

Poiché l'integrazione è un'operazione lineare, allora la trasformata e antitrasformata di Fourier risultano possedere la stessa proprietà, essendo definite per mezzo di un integrale:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}\{af(t) + bg(t)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} (af(t) + bg(t))e^{-i\omega t} dt \\
 &= a \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt + b \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-i\omega t} dt \\
 &= a\mathcal{F}\{f(t)\} + b\mathcal{F}\{g(t)\}
 \end{aligned}$$

**Esempio 2.5.7.**

Le funzioni periodiche e reali trattate nella sezione precedente ammettono trasformata che può essere calcolata a partire dalla loro rappresentazione in serie di Fourier; infatti se  $f(t)$  è periodica di periodo  $T$ , allora

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega_0 t}, \quad \text{con} \quad c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt.$$

Usando l'espansione in serie, la trasformata di Fourier di  $f(t)$  è

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \right) e^{-i\omega t} dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{in\omega_0 t} e^{-i\omega t} dt.$$

Dalla 2.10 e per la linearità si ottiene:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta(\omega - n\omega_0).$$

Il che mostra che lo spettro di frequenza di un segnale periodico altro non è che una sovrapposizione di funzioni impulsive nel dominio delle frequenze situate nei multipli interi (armoniche) della frequenza fondamentale della funzione  $f(t)$ . Il peso di ogni impulso è il coefficiente della serie armonica moltiplicato per  $2\pi$ .

Per esempio la funzione cosinusoidale

$$f(t) = A \cos \omega_0 t$$

grazie alla relazione di eulero e alla 2.10 ha trasformata:

$$\mathcal{F} \{A \cos \omega_0 t\} = \mathcal{F} \left\{ \frac{A}{2} (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}) \right\} = \frac{A}{2} \mathcal{F} \{e^{i\omega_0 t}\} + \frac{A}{2} \mathcal{F} \{e^{-i\omega_0 t}\}$$

da cui

$$A \cos \omega_0 t \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \pi A [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)].$$

**Dualità (simmetria)**

Rammentando le funzioni trasformata e l'antitrasformata

$$\mathcal{F} \{f(t)\} = F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (2.16)$$

$$\mathcal{F}^{-1} \{F(\omega)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (2.17)$$

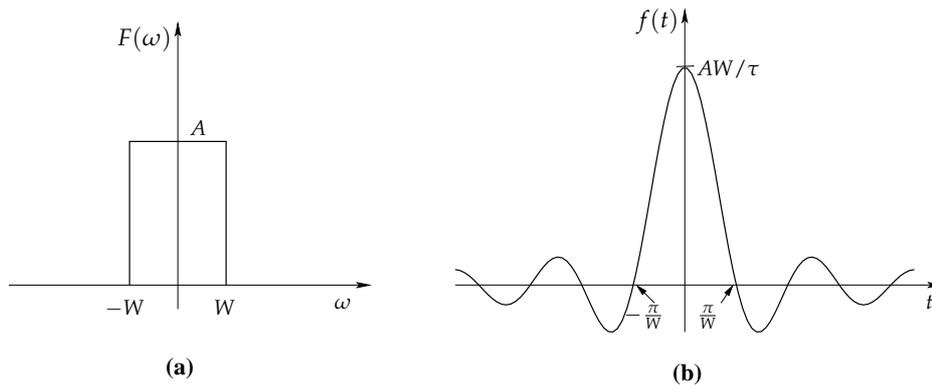
ed osservando la simmetria esistente tra la (2.16) e la sua inversa (2.17) rispettivamente nella variabile  $t$  e nella variabile  $\omega$ , vale allora:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \{F(t)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= 2\pi \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{i(-\omega)t} dt \right] \\ &= 2\pi f(-\omega). \end{aligned}$$

**Esempio 2.5.8.**

La trasformata inversa della funzione impulso rettangolare e definita nel dominio delle frequenze (Figura 2.15), può essere ottenuta applicando alla coppia di trasformate impulso-sinc (ricavata alla fine della Sezione 2.5) la proprietà di dualità:

$$f(t) = A \frac{\sin Wt}{\pi t} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega) = \begin{cases} A & |\omega| < W \\ 0 & |\omega| > W \end{cases}.$$



**Figura 2.15** (a) Impulso rettangolare nel dominio della frequenza. (b) Sua antitrasformata.

**Scalatura**

Se  $a$  è un reale positivo si ha che:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(at)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(at)e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-i\frac{\omega}{a}\tau} d\tau \quad (\text{con } \tau = at, \text{ da cui } dt = d\tau/a) \\ &= \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right). \end{aligned}$$

Analogamente, se  $a$  è un reale negativo si ha che  $\mathcal{F}\{f(at)\} = -\frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$ .

**Traslazione nel tempo e in frequenza**

Riguardo la traslazione nel tempo si ha che:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(t-t_0)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-t_0)e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-i\omega(\tau+t_0)} d\tau \quad (\text{con } \tau = t - t_0, \text{ da cui } dt = d\tau) \\ &= e^{-i\omega t_0} F(\omega). \end{aligned} \tag{2.18}$$

Una conseguenza rilevante è che la trasformata del segnale traslato preserva il modulo ma introduce una traslazione lineare della fase pari a  $-t_0\omega$ . Infatti

$$e^{-i\omega t_0} F(\omega) = |F(\omega)| e^{i(\angle F(\omega) - \omega t_0)}.$$

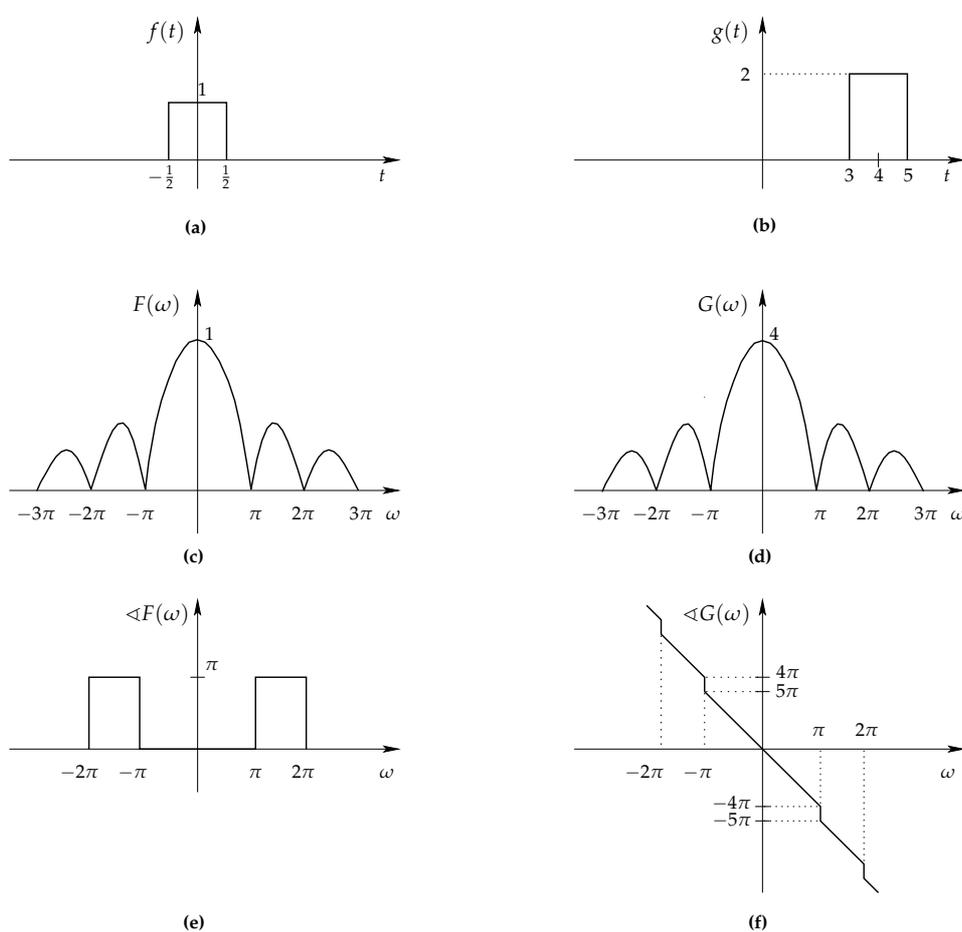
La proprietà di traslazione in frequenza si verifica facilmente combinando la proprietà di dualità e quella di traslazione nel tempo.

### Esempio 2.5.9.

Supponiamo di operare una scalatura e una traslazione temporale dell'impulso rettangolare  $f(t) = \text{rect}(t)$  (vedi Figura 2.16(a)) la cui trasformata, ricavata dalla (2.8), è:

$$F(\omega) = \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right). \quad (2.19)$$

Modulo e fase di  $F(\omega)$  sono mostrate rispettivamente nella Figura 2.16(c) e nella Figura 2.16(e).



**Figura 2.16** (a) Segnale  $f(t) = \text{rect}(t)$ . (b) Segnale  $g(t) = 2f(\frac{t-4}{2})$ . (c-e) Modulo e fase della trasformata  $F(\omega)$  di  $f(t)$ . (d-f) Modulo e fase della trasformata  $G(\omega)$  di  $g(t)$ .

Sia ora  $g(t) = 2f(\frac{t-4}{2}) = 2\text{rect}(0.5t - 2)$ , il segnale illustrato in Figura 2.16(b). Usando la proprietà di traslazione temporale e di scalatura della trasformata, a partire dalla

(2.19) si deriva facilmente:

$$G(\omega) = 4 \operatorname{sinc}(\omega) e^{-i4\omega}.$$

L'ampiezza di  $G(\omega)$  è mostrata in Figura 2.16(d), mentre la fase, lineare a tratti e pari a  $-4\omega$  negli intervalli multipli pari di  $\pi$  e pari a  $-4\omega + \pi$  negli intervalli multipli dispari di  $\pi$ , è mostrata in Figura 2.16(f).

### Convoluzione nel tempo e in frequenza

Per la proprietà di convoluzione nel tempo si ha:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(t) * g(t)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau \right) e^{-i\omega t} dt && \text{(per la (1.6))} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} g(t - \tau) e^{-i\omega t} dt \right) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} G(\omega) d\tau && \text{(per la traslaz. nel tempo (2.18))} \\ &= G(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= G(\omega) F(\omega) \end{aligned}$$

La convoluzione in frequenza si giustifica applicando la proprietà di dualità a quella di convoluzione nel tempo.

#### Esempio 2.5.10.

La proprietà di convoluzione nel tempo risulta particolarmente utile quando le trasformate dei due segnali sono semplici, come nel caso della funzione  $\operatorname{sinc}(x) =$ .

### Modulazione

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(t) \cos \omega_0 t\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega_0 t e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2} e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i(\omega + \omega_0)t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i(\omega - \omega_0)t} dt \\ &= \frac{1}{2} [F(\omega + \omega_0) + F(\omega - \omega_0)]. \end{aligned}$$

### Differenziazione

Differenziando entrambi i membri della (2.17) si ha:

$$\frac{d}{dt} f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} i\omega F(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

da cui

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d}{dt} f(t)\right\} = i\omega F(\omega).$$

### Integrazione

Si consideri la convoluzione di una generica funzione  $f(t)$  con la funzione gradino unitario (definita nell'Esempio 1.3.18):

$$f(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau. \quad (2.20)$$

Pertanto:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left\{ \int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau \right\} &= \mathcal{F} \{ f(t) * u(t) \} && \text{(per la (2.20))} \\ &= F(\omega) \left( \pi\delta(\omega) + \frac{1}{i\omega} \right) && \text{(per la prop. di convoluzione)} \\ &= \frac{1}{i\omega} F(\omega) + \pi F(0)\delta(\omega). \end{aligned}$$

Il fattore  $F(0)$  nella precedente espressione deriva dal fatto che, se  $F(\omega)$  è una funzione continua in 0, allora  $F(\omega)\delta(\omega) = F(0)\delta(\omega)$ .

#### Esempio 2.5.11.

La proprietà di linearità è in molti casi utile per trovare la trasformata di Fourier di alcuni tipi di forme d'onda. Si consideri ad esempio

$$f(t) = B \cos \omega_0 t.$$

Usando la relazione di Eulero,

$$\cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$$

possiamo riscrivere l'espressione per  $f(t)$  come

$$f(t) = \frac{B}{2} [e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}] = \frac{B}{2} e^{i\omega_0 t} + \frac{B}{2} e^{-i\omega_0 t}.$$

Sapendo che la trasformata dell'esponenziale complesso  $e^{i\omega_0 t}$  è un impulso traslato in  $\omega_0$ , per la linearità abbiamo che

$$\mathcal{F} \{ B \cos \omega_0 t \} = \frac{B}{2} \mathcal{F} \{ e^{i\omega_0 t} \} + \frac{B}{2} \mathcal{F} \{ e^{-i\omega_0 t} \} = \pi B \delta(\omega - \omega_0) + \pi B \delta(\omega + \omega_0),$$

od anche

$$\cos \omega_0 t \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \pi B [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)].$$

### 2.5.5 Coppie Base di Trasformate

Nella Tabella 2.2 vengono riportate alcune coppie base trasformata-antitrasformata di Fourier che spesso si incontrano nella pratica. Queste coppie sono particolarmente utili per il fatto che in molti casi i sistemi complessi possono essere descritti come combinazioni di sistemi più semplici dei quali sono note le coppie di trasformate.

**Tabella 2.2** Alcune coppie base di trasformata-antitrasformata ( $a$ , dove compare, è un numero reale positivo).

$f(t)$	$F(\omega)$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{a + i\omega}$
$te^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(a + i\omega)^2}$
$e^{-a t }$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$
$e^{-at^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\omega^2/4a}$
$\text{sgn}(t)$	$\frac{2}{i\omega}$
$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{i\omega}$
$\delta(t)$	1
$\delta(t - t_0)$	$e^{-i\omega t_0}$
1	$2\pi\delta(\omega)$
$e^{\pm i\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega \mp \omega_0)$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$
$\sin(\omega_0 t)$	$i\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$
$\cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\pi}{2}[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{i\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$
$\sin(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\pi}{2i}[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$
$e^{-at} \cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{a + i\omega}{(a + i\omega)^2 + \omega_0^2}$
$e^{-at} \sin(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\omega_0}{(a + i\omega)^2 + \omega_0^2}$
$f_T(t) = \begin{cases} 1 &  t  < T/2 \\ 0 &  t  > T/2 \end{cases}$	$T \text{sinc}\left(\frac{\omega t}{2}\right)$
$\text{sinc}\left(\frac{Tt}{2}\right)$	$\frac{2\pi}{T} f_T(\omega)$

## 2.6 Risposta in Frequenza dei Sistemi Lineari Tempo-Invarianti

Nel capitolo precedente abbiamo definito la classe dei sistemi lineari e tempo-invarianti (LTI), mostrando che il loro comportamento è completamente individuato dalla risposta del sistema alla funzione impulsiva  $\delta(t)$ .

Infatti, se  $S$  è un sistema lineare tempo-invariante,  $h(t)$  è la risposta  $S(\delta(t))$  del sistema all'impulso  $\delta(t)$  e  $g(t)$  è la risposta  $S(f(t))$  del sistema all'ingresso  $f(t)$ , allora

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)h(t-x)dx,$$

come dimostrato in Fatto 1.5. In altri termini, l'uscita  $g(t)$  del sistema  $S$  è la convoluzione dell'ingresso  $f(t)$  con la risposta all'impulso  $h(t)$ . A causa della proprietà di convoluzione riportata in Tabella 2.1, denotando con  $F(\omega)$ ,  $H(\omega)$  e  $G(\omega)$  rispettivamente le trasformate di Fourier di  $f(t)$ ,  $h(t)$  e  $g(t)$ , si ottiene:

$$G(\omega) = H(\omega)F(\omega).$$

La trasformata di Fourier  $H(\omega)$  della risposta  $h(t)$  all'impulso è spesso chiamata *funzione di trasferimento* del sistema. Analizzando il comportamento del sistema nel dominio delle frequenze anziché nel dominio dei tempi, possiamo concludere:

**Fatto 2.2.** *La risposta nel dominio delle frequenze  $G(\omega)$  di un sistema LTI con funzione di trasferimento  $H(\omega)$  è il prodotto della trasformata di Fourier  $F(\omega)$  dell'ingresso per la funzione di trasferimento  $H(\omega)$ .*

Per quanto riguarda il modulo delle trasformate in gioco, vale che

$$|G(\omega)| = |H(\omega)||F(\omega)|.$$

Pertanto i sistemi LTI sono in grado di operare una certa selezione sulle frequenze, ampliando o attenuando in uscita le componenti armoniche dell'ingresso. Per questa attitudine a "filtrare" componenti in frequenza, i sistemi LTI sono anche detti *filtri lineari*.

### 2.6.1 Filtri Ideali

Un sistema senza distorsione è un sistema che riproduce in uscita la stessa forma del segnale d'ingresso, a meno di un eventuale fattore amplificativo e di un eventuale ritardo temporale. Un tale sistema può essere quindi descritto dalla trasformazione:

$$g(t) = Af(t - t_0).$$

Passando alle trasformate di Fourier e applicando la proprietà di traslazione temporale, si ha:

$$G(\omega) = Ae^{-i\omega t_0}F(\omega).$$

La funzione di trasferimento  $H(\omega)$  del sistema è quindi data da:

$$H(\omega) = Ae^{-i\omega t_0}.$$

Si noti che il modulo della funzione di trasferimento è costante ( $|H(\omega)| = A$ ) mentre la fase è lineare ( $\angle H(\omega) = -t_0\omega$ ).

Un sistema che annulla le componenti armoniche in determinati intervalli di frequenza e che si comporta come un sistema senza distorsione sulle frequenze rimanenti è detto *filtro ideale*. Un esempio di filtro ideale è il filtro *passa-basso*, che “passa” (riproduce in uscita con guadagno costante e fase lineare) le componenti con frequenza non superiore a una certa *frequenza di taglio*  $\omega_c$ , ed elimina quelle con frequenza superiore a questa soglia. Tale filtro ha quindi la seguente funzione di trasferimento:

$$H(\omega) = \begin{cases} Ae^{-i\omega t_0}, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

Un filtro *passa-alto*, viceversa, elimina le componenti in frequenza basse e passa quelle alte (superiori a  $\omega_c$ ); il filtro *passa-banda* infine, passa una *banda* o *intervallo* di componenti in frequenza ( $\omega_a < \omega < \omega_b$ ) ed elimina quelle inferiori o superiori ad essa. Le bande evidenziate in questi esempi sono quindi due: la banda che interessa preservare effettivamente (*banda passante*) e la banda nella quale si richiede l’eliminazione (*banda proibita*). Modulo e fase dei filtri ideali sono mostrati in Figura 2.17.

### Esempio 2.6.1.

Ricostruzione di due segnali a partire dalla loro somma.

Fissati due segnali  $f_1(t)$  e  $f_2(t)$ , si vuole ricostruire  $f_1(t)$  o  $f_2(t)$  conoscendo la loro somma  $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$ . Questo non è in generale possibile, poiché la conoscenza della somma non permette di individuare univocamente gli addendi. La ricostruzione è tuttavia possibile in certi casi particolari.

Supponiamo qui che i supporti delle trasformate  $F_1(\omega)$  e  $F_2(\omega)$  dei segnali  $f_1(t)$  e  $f_2(t)$  siano disgiunti. Per esempio, consideriamo il caso in cui  $F_1(\omega) = 0$  per  $\omega > W_1$  e  $F_2(\omega) = 0$  per  $\omega < W_2$ , con  $W_1 < W_2$  (considerando solo valori non negativi delle frequenze). Applicando al segnale somma  $f(t)$  un filtro ideale passa-basso con frequenza di taglio  $W_1$ , si ottiene in uscita il segnale  $f_1(t)$ . Infatti, se la funzione di trasferimento del filtro è

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W_1 \\ 0, & |\omega| > W_1 \end{cases}$$

la trasformata di Fourier  $G(\omega)$  dell’uscita è tale che:

$$G(\omega) = H(\omega)F(\omega).$$

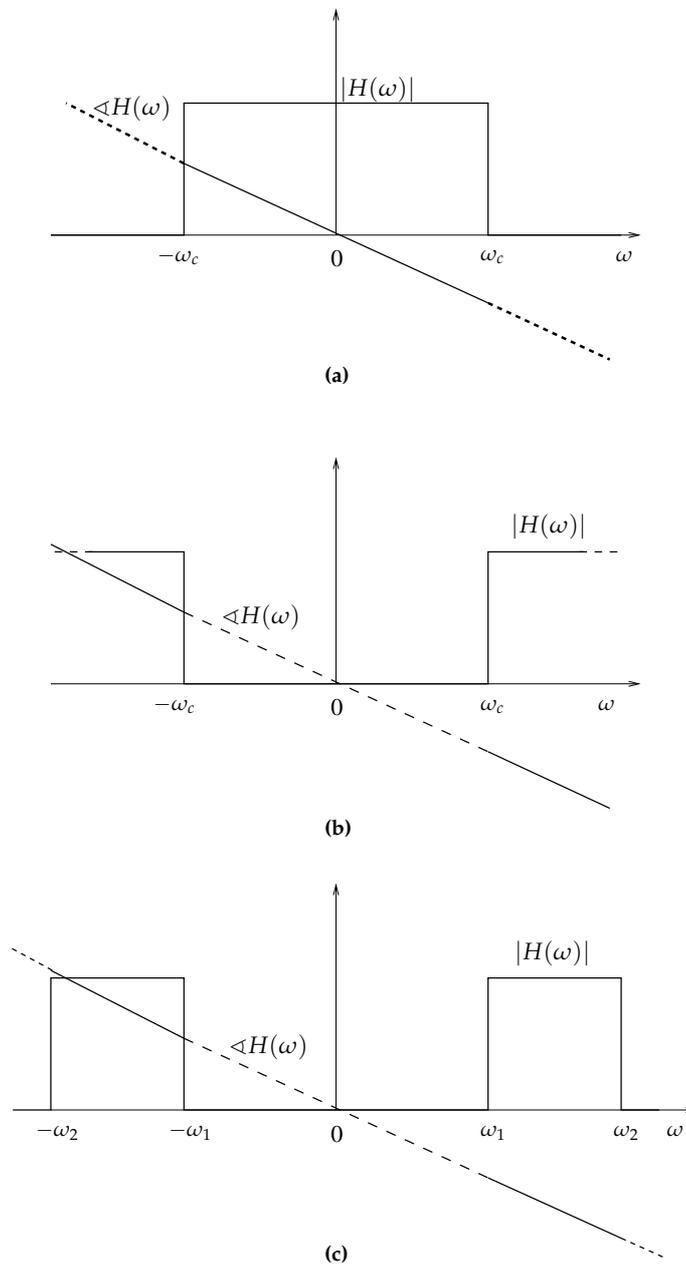
Ricordando che per  $\omega \leq W_1$  risulta  $F(\omega) = F_1(\omega)$  e  $H(\omega) = 1$ , mentre per  $\omega > W_1$  risulta  $H(\omega) = 0$  si ottiene:

$$G(\omega) = F_1(\omega).$$

Antitrasformando, concludiamo che il filtro produce il segnale  $f_1(t)$ .

Per studiare il comportamento di un filtro ideale nel dominio del tempo, basta osservare che la risposta  $h(t)$  del filtro all’impulso  $\delta(t)$  è l’antitrasformata di Fourier della sua funzione di trasferimento. Per fissare le idee, consideriamo qui un filtro passa-basso con funzione di trasferimento  $H(\omega)$  dove:

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$



**Figura 2.17** (a). Risposta in frequenza di un filtro passa-basso ideale. (b). Risposta in frequenza di un filtro passa-alto ideale. (c). Risposta in frequenza di un filtro passa-banda ideale.

Come ricavato nell'esempio 2.5.8, l'antitrasformata di Fourier di  $H(\omega)$ , e quindi la risposta all'impulso di tale sistema, è la funzione

$$h(t) = \frac{\sin \omega_c t}{\pi t},$$

il cui grafico è dato in Figura 2.18.

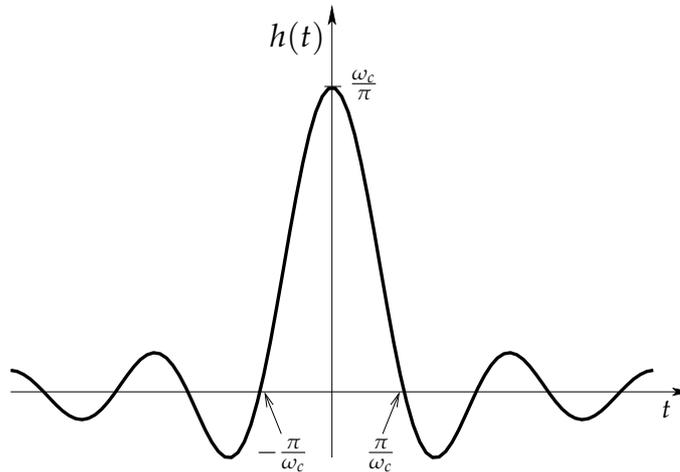


Figura 2.18 Risposta all'impulso di un filtro passa-basso ideale.

Si osserva che  $h(t)$  è in generale diversa da zero per  $t < 0$  e quindi il filtro ideale è un sistema lineare tempo-invariante ma non causale. Questo significa che un filtro ideale non può essere realizzato in pratica se si intende mantenere un qualche principio di causalità; l'approssimazione di filtri ideali con filtri fisicamente realizzabili sarà studiata in seguito.

## 2.6.2 Sistemi Caratterizzati da Equazioni Differenziali Lineari a Coefficienti Costanti

Un'importante classe di sistemi LTI è quella in cui l'ingresso  $f(t)$  e l'uscita  $g(t)$  soddisfano un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti della forma:

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k g(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k f(t)}{dt^k}. \quad (2.21)$$

Si osservi che il sistema presentato nell'Esempio 1.3.1 corrisponde al caso particolare in cui  $N = 1$  e  $M = 0$ ; come vedremo in seguito, circuiti ottenuti con resistenze, induttanze e condensatori realizzano sistemi i cui comportamenti sono descritti dall'equazione differenziale (2.21).

Poiché in generale un'equazione differenziale ammette infinite soluzioni, occorre dare delle condizioni ausiliarie per determinare completamente la relazione ingresso-uscita del sistema. In particolare, è qui sufficiente assumere che il sistema sia causale, cioè  $g(t) = 0$  per  $t < t_0$  se  $f(t) = 0$  quando  $t < t_0$ .

Vogliamo ora determinare la funzione di trasferimento del sistema descritto dall'equazione (2.21).

Se si applica la trasformata di Fourier ad entrambi i membri della (2.21) si ottiene

$$\mathcal{F} \left\{ \sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k g(t)}{dt^k} \right\} = \mathcal{F} \left\{ \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k f(t)}{dt^k} \right\}.$$

Dalla proprietà di linearità:

$$\sum_{k=0}^N a_k \mathcal{F} \left\{ \frac{d^k g(t)}{dt^k} \right\} = \sum_{k=0}^M b_k \mathcal{F} \left\{ \frac{d^k f(t)}{dt^k} \right\}$$

e dalla proprietà di differenziabilità (Tabella (2.1)), denotando con  $F(\omega)$  e  $G(\omega)$  rispettivamente la trasformata di Fourier di  $f(t)$  e  $g(t)$ , si ha che:

$$\sum_{k=0}^N a_k (i\omega)^k G(\omega) = \sum_{k=0}^M b_k (i\omega)^k F(\omega),$$

o equivalentemente

$$G(\omega) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k (i\omega)^k}{\sum_{k=0}^N a_k (i\omega)^k} F(\omega).$$

Concludiamo che la funzione di trasferimento  $H(\omega)$  di questo sistema è della forma:

$$H(\omega) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k (i\omega)^k}{\sum_{k=0}^N a_k (i\omega)^k}.$$

Si osservi che la funzione  $H(\omega)$  è una funzione razionale, cioè un rapporto di polinomi nella variabile  $i\omega$ . I coefficienti del numeratore sono esattamente i coefficienti del membro sinistro della (2.21), mentre i coefficienti del denominatore sono esattamente i coefficienti del membro della (2.21). In questo modo  $H(\omega)$  può essere facilmente dedotta dall'equazione differenziale stessa e antitrasformata applicando il metodo delle frazioni parziali come mostrato nel seguente esempio.

### Esempio 2.6.2.

Si consideri un sistema LTI caratterizzato dalla seguente equazione differenziale

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 4 \frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t).$$

Per quanto visto in precedenza la risposta in frequenza del sistema è:

$$H(\omega) = \frac{i\omega + 2}{(i\omega)^2 + 4(i\omega) + 3}.$$

Per determinare la corrispondente risposta all'impulso è richiesta la trasformata inversa di  $H(\omega)$ . Questo può essere fatto mediante l'impiego della tecnica di *espansione in frazioni parziali*. Come primo passo fattorizziamo il denominatore scrivendolo nella forma:

$$H(\omega) = \frac{i\omega + 2}{(i\omega + 1)(i\omega + 3)}. \quad (2.22)$$

Poichè le due radici sono distinte e di molteplicità uno<sup>1</sup>, espandiamo  $H(\omega)$  nella somma di funzioni razionali più semplici (frazioni parziali):

$$H(\omega) = \frac{A_1}{(i\omega + 1)} + \frac{A_2}{(i\omega + 3)}. \quad (2.23)$$

<sup>1</sup>Qualora una radice, che chiamiamo  $q$ , sia di molteplicità  $s > 1$ , verrà espansa come la somma di  $s$  funzioni razionali nel seguente modo:  $\frac{A_{11}}{(i\omega+q)} + \frac{A_{12}}{(i\omega+q)^2} + \dots + \frac{A_{1s}}{(i\omega+q)^s}$ .

Il problema ora è quello di determinare le costanti  $A_1$  e  $A_2$ . Un semplice metodo è offerto dalla seguente procedura: supponiamo di voler calcolare la costante  $A_1$ , allora moltiplicando entrambi i membri della (2.23) per  $(i\omega + 1)$  otteniamo

$$(i\omega + 1)H(\omega) = A_1 + \frac{A_2(i\omega + 1)}{i\omega + 3}.$$

Valutando l'equazione precedente in  $i\omega = -1$  si ha che

$$A_1 = (i\omega + 1)H(\omega)|_{i\omega=-1}$$

da cui, sostituendo  $H(\omega)$  con la (2.22), si ricava che

$$A_1 = \frac{i\omega + 2}{i\omega + 3}|_{i\omega=-1} = \frac{1}{2}.$$

Analogamente si trova che  $A_2 = \frac{1}{2}$ , da cui

$$H(\omega) = \frac{\frac{1}{2}}{i\omega + 1} + \frac{\frac{1}{2}}{i\omega + 3}. \quad (2.24)$$

Dall'Esempio 2.5.3 sappiamo riconoscere la trasformata inversa di ciascuno dei due termini della (2.24), ottenendo il seguente risultato:

$$h(t) = \frac{1}{2}e^{-t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-3t}u(t).$$

Il rapporto ingresso-uscita del sistema causale descritto dall'equazione differenziale qui considerata risulta quindi:

$$g(t) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{2}e^{-\tau} + \frac{1}{2}e^{-3\tau}\right)f(t - \tau)d\tau.$$

## 2.7 Modulazione nei Sistemi di Comunicazione

L'operazione di modulazione consiste nel rilocare la banda base di un segnale su una opportuna banda (alte frequenze) che renda possibile, nonché efficiente, la trasmissione dello stesso su canali presenti nei sistemi di comunicazione reali, preservando quanto più possibile l'informazione codificata.

Questa necessità è dovuta a tre ragioni principali.

1. La lunghezza d'onda è inversamente proporzionale alla frequenza. In una trasmissione con onde elettromagnetiche, che si muovono alla velocità della luce, la ricezione efficiente viene effettuata attraverso antenne la cui dimensione è almeno  $\lambda/10$  metri, dove  $\lambda$  è la lunghezza d'onda del segnale ricevuto. È singolare verificare che segnali che si muovono alla velocità della luce ( $c = 3 \times 10^8$  m/s), con frequenza  $f_c = 5$  kHz, richiedono antenne di dimensioni pari a un decimo di

$$\lambda = \frac{c}{f_c} \frac{[\text{m/s}]}{[1/\text{s}]} = \frac{3 \times 10^8}{5 \times 10^3} \text{ [m]} = 60 \text{ km},$$

che si traduce in una specifica di almeno 6 km di lunghezza per l'antenna in ricezione! Misure che risulterebbero quanto meno poco pratiche. È quindi evidente che occorre aumentare la frequenza del segnale trasmesso per diminuire la dimensione degli apparati riceventi.

2. Interferenza e rumore nella trasmissione. La presenza di più trasmettitori sulla stessa banda di frequenza creerebbe problemi di sovrapposizione. Per esempio, i segnali del parlato variano su un range di frequenze da 0 a 4000 Hz, la musica da 0 a 20 kHz, i segnali video originali da 0 a 5 MHz; se segnali dello stesso tipo fossero trasmessi contemporaneamente sulla stessa frequenza, in ricezione si avrebbero pesanti interferenze. Non solo: ai segnali trasmessi si andrebbero ad aggiungere i numerosi disturbi o rumori presenti nelle basse frequenze (luce elettrica, motori elettrici), da qui l'importanza di trasmettere su alte frequenze.
3. La complessità dei sistemi di trasmissione (trasmettenti, riceventi e trasduttori) viene semplificata in presenza di segnali modulati.

### 2.7.1 Modulazione e Demodulazione in Ampiezza (AM)

Un modo per rilanciare il segnale  $f(t)$  su diverse bande di frequenza è quello di moltiplicare il segnale per una sinusoidale di opportuna frequenza  $\omega_0$ :

$$g(t) = A f(t) \cos \omega_0 t.$$

Il segnale sinusoidale è detto *portante (carrier)*, il segnale  $f(t)$  *modulante* e il segnale  $g(t)$  segnale *modulato*. Il sistema così realizzato è un sistema lineare ma non tempo-invariante, detto *modulazione di ampiezza (AM)*.

Ricordando che  $\cos \omega_0 t = \frac{1}{2} (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t})$ , passando al dominio delle frequenze (vedi proprietà di modulazione in paragrafo 2.5.4) si ha:

$$G(\omega) = \frac{A}{2} (F(\omega + \omega_0) + (F(\omega - \omega_0))).$$

Poiché  $f(t)$  è un segnale reale, sappiamo che  $|F(\omega)|$  è una funzione pari; supponiamo inoltre che  $F(\omega)$  sia a banda limitata, cioè che  $F(\omega)$  sia nulla per  $|\omega| \geq W$  come mostrato nel grafico di Figura 2.19. Il segnale ha componenti non nulle per frequenze  $-W \leq \omega \leq W$ .

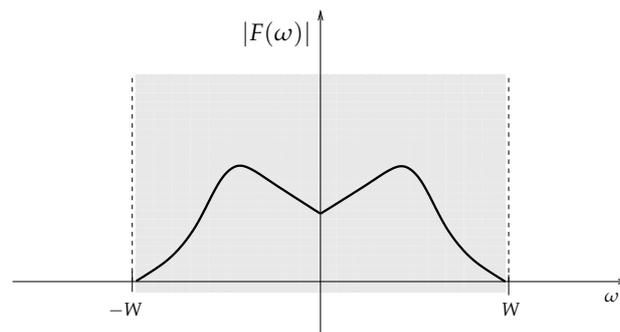


Figura 2.19 Modulo della trasformata di un segnale reale  $f(t)$  a banda limitata da  $W$ .

Se  $\omega_0 \gg W$ , il segnale modulato  $g(t)$  ha, per frequenze positive, componenti non nulle per  $\omega_0 - W \leq \omega \leq \omega_0 + W$ , come mostra il grafico di Figura 2.20.

Possiamo allora concludere:

**Fatto 2.3.** Un segnale  $f(t)$  a banda limitata da  $W$  può essere completamente ricostruito dal segnale modulato  $g(t) = A f(t) \cos \omega_0 t$ , se  $\omega_0 > W$ .

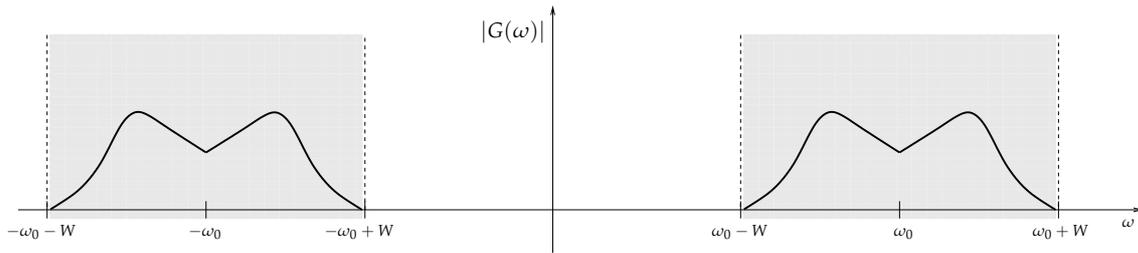


Figura 2.20 Modulo della trasformata del segnale modulato  $g(t) = Af(t) \cos \omega_0 t$ .

Osserviamo che, per segnali a banda limitata da  $W$  e con  $\omega_0 > W$ , il segnale modulato  $g(t)$  è ridondante ai fini della ricostruzione di  $f(t)$ . Infatti, poiché  $G(\omega_0 - \omega) = G(\omega_0 + \omega)$  per  $0 \leq \omega \leq W$ , il segnale  $g(t)$ , e quindi  $f(t)$ , può essere ricostruito sulla base della conoscenza di  $G(\omega)$  nell'intervallo (side)  $\omega_0 \leq \omega \leq \omega_0 + W$  anziché sull'intero intervallo (double-side)  $\omega_0 - W \leq \omega \leq \omega_0 + W$ .

Per questo motivo la modulazione di ampiezza prima introdotta è chiamata DSB/SC-AM (*Double-Sideband Suppressed Carrier Amplitude Modulation*); essa comporta una richiesta di banda per la trasmissione di dimensione almeno  $2W$ , e un certo sforzo è stato dedicato a perfezionare l'operazione di modulazione per poter risparmiare banda (riducendola del 50%) per la trasmissione. Uno dei metodi adottati consiste nell'applicare un filtro passa-banda per eliminare le frequenze indesiderate.

### Demodulazione

Abbiamo visto che, in linea di principio, il segnale  $f(t)$  può essere ricostruito sulla base del segnale modulato  $g(t)$ . Descriviamo ora brevemente un sistema di demodulazione, in grado di realizzare effettivamente la ricostruzione. Per prima cosa si applica al segnale  $g(t) = A \cos \omega_0 t f(t)$  una nuova modulazione ottenendo il segnale

$$z(t) = g(t) \cos \omega_0 t = Af(t) \cos^2 \omega_0 t.$$

Ricordando la formula di bisezione del coseno  $\cos^2 \omega_0 t = (1 + 2 \cos 2\omega_0 t)/2$ , si ottiene:

$$z(t) = \frac{A}{2} f(t) + Af(t) \cos 2\omega_0 t.$$

Applicando le trasformate di Fourier, l'espressione precedente diventa:

$$Z(\omega) = \frac{A}{2} F(\omega) + \frac{A}{2} [F(\omega + 2\omega_0) + F(\omega - 2\omega_0)].$$

Se  $f(t)$  è a banda limitata da  $W$  e se  $\omega_0 > 2W$ , applicando a  $z(t)$  un filtro passa-basso con frequenza di taglio  $W$  si ottiene il segnale  $\frac{A}{2} f(t)$ . Il sistema complessivo di modulazione, trasmissione e demodulazione è rappresentato nella Figura 2.21.

Un'ulteriore applicazione della modulazione AM è la possibilità di trasmettere simultaneamente più segnali (a banda limitata da  $W$ ) sullo stesso canale. Supponiamo di voler trasmettere due segnali  $f_1(t)$  e  $f_2(t)$  a banda limitata da  $W$ . Possiamo procedere come segue:

1. si modulano  $f_1(t)$  e  $f_2(t)$  con due diverse frequenze  $\omega_1$  e  $\omega_2$  ottenendo  $g_1(t) = Af_1(t) \cos \omega_1 t$  e  $g_2(t) = Af_2(t) \cos \omega_2 t$ ;

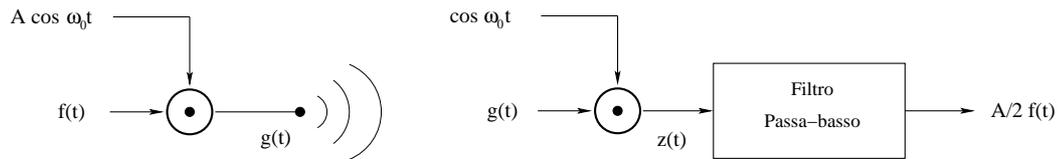


Figura 2.21 Modulazione AM, trasmissione e demodulazione AM.

2. si sommano i due segnali  $g_1(t)$  e  $g_2(t)$  trasmettendo il segnale  $g(t)$  risultante;
3. se  $\omega_1, \omega_2 > W$  e  $|\omega_1 - \omega_2| > 2W$ , è facile osservare che i supporti di  $G_1(\omega)$  e  $G_2(\omega)$  risultano disgiunti, e quindi dal segnale  $g(t)$  è possibile ricostruire i segnali  $g_1(t)$  e  $g_2(t)$  con l'applicazione degli opportuni demodulatori.

Un esempio di sistema che trasmette simultaneamente 2 segnali modulati sullo stesso canale è mostrato in Figura 2.22.

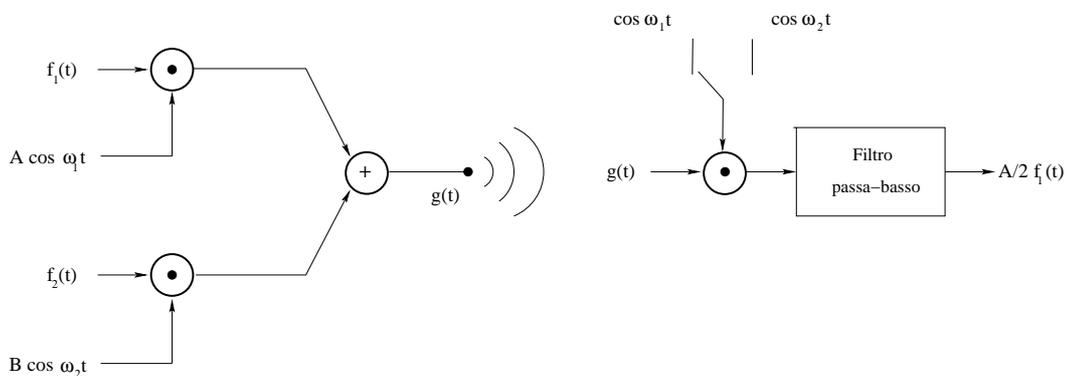


Figura 2.22 Trasmissione simultanea di 2 segnali modulati (AM) e ricezione.

Il metodo precedente può essere facilmente esteso alla trasmissione sullo stesso canale di  $N$  segnali a banda limitata da  $W$ : in questo caso la larghezza della banda utilizzata dovrà essere almeno  $2NW$ .

### Esempio 2.7.1.

Le stazioni per trasmissioni radio commerciali in AM utilizzano una modulazione leggermente diversa da quella da noi trattata, detta AMSB-TC o AM convenzionale:

$$g(t) = A(1 + af(t)) \cos \omega_0 t.$$

Nella formula precedente  $f(t)$  è un segnale normalizzato, in modo che  $|f(t)| \leq 1$ , ed il parametro  $a$  è un numero reale compreso tra 0 ed 1, detto indice di modulazione. Mentre  $f(t)$  può assumere anche valori negativi, il termine  $1 + af(t)$  risulta sempre positivo: il segnale  $g(t)$  può quindi essere demodulato con un semplice rivelatore di involuppo, ottenendo in uscita il segnale  $A(1 + af(t))$  che, a meno di una traslazione e di un fattore di scala, coincide con  $f(t)$ .

Il rivelatore di involuppo è basato sul fatto che, per funzioni  $s(t)$  a valori positivi, l'involuppo di  $s(t) \cos \omega_0 t$  coincide proprio con  $s(t)$ , come si rileva in Figura 2.23.

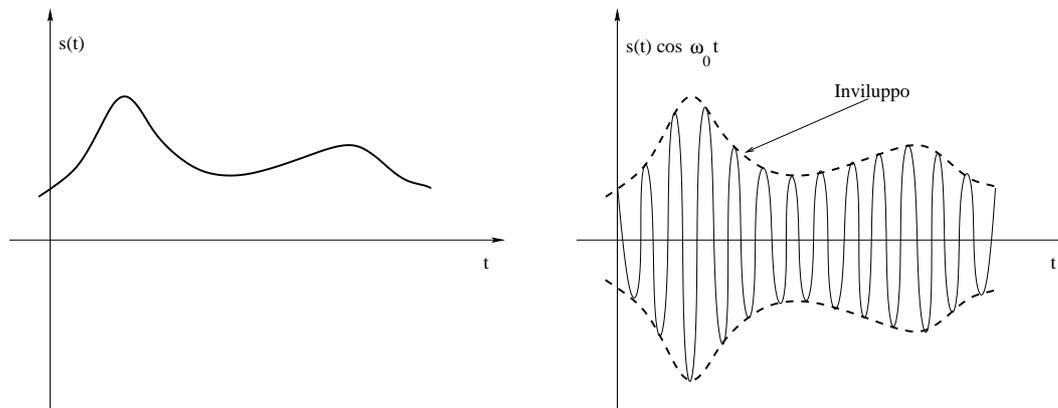


Figura 2.23 Involuppo del segnale  $s(t) \cos \omega_0 t$ , con  $s(t) \geq 0$ .

La modulazione AM convenzionale presenta allora una maggior complessità nel sistema che effettua la modulazione, semplificando tuttavia il ricevitore, come si addice alle trasmissioni "broadcast". Un semplice rivelatore di involuppo è dato dal circuito mostrato in Figura 2.24.

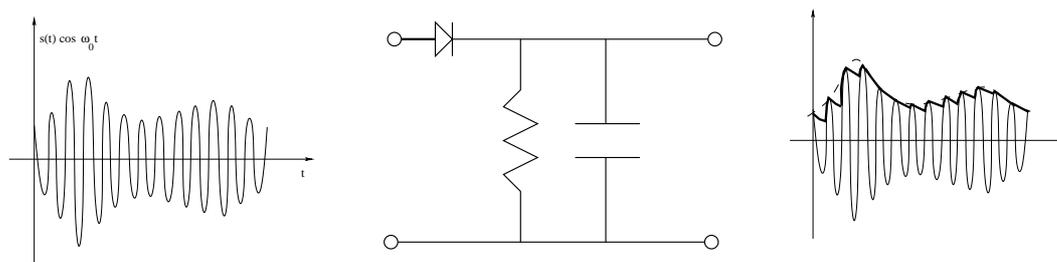


Figura 2.24 Rivelatore di involuppo.

Esso è composto da un diodo che, avendo in ingresso il segnale  $m(t)$ , dà in uscita il segnale  $m(t)u(m(t))$ , eliminando quindi le componenti negative del segnale, e da un circuito RC che elimina le componenti in alta frequenza.

La banda disponibile per trasmissioni in AM varia da 535 a 1605 kHz; tale banda viene divisa in identici blocchi di 10 kHz e ad ogni stazione viene assegnato un blocco: la stazione può allora trasmettere senza interferire messaggi con limite di banda di 5 kHz.

## 2.8 Modulazione e Demodulazione in Frequenza (FM)

In questo paragrafo discutiamo un'altra importante tecnica di modulazione analogica: la modulazione in frequenza (FM).

Il sistema che realizza la modulazione in frequenza ha un comportamento descritto dalla seguente relazione ingresso-uscita:

$$g(t) = A \cos \left( \omega_0 t + \Delta \omega \int_0^t f(\tau) d\tau \right).$$

Per semplicità di trattazione, in questo paragrafo supporremo che il segnale di ingresso  $f(t)$  sia normalizzato, e che quindi  $|f(t)| \leq 1$ . I parametri  $A$ ,  $\Delta\omega$  e  $\omega_0$  sono numeri positivi arbitrari, in cui ipotizziamo tuttavia che  $\Delta\omega$ , detto indice di modulazione, sia molto minore di  $\omega_0$ . Questo fa sì che il termine  $\omega_0 + \Delta\omega f(t)$  risulti sempre positivo.

Osserviamo che:

1. Il sistema che realizza la FM non è lineare, contrariamente a quel che accadeva per la AM; un sinonimo spesso usato in luogo di FM è infatti quello di “modulazione non lineare”.
2. Per un segnale di tipo  $\cos m(t)$  è possibile introdurre il concetto di frequenza istantanea  $\omega_i(t)$  al tempo  $t$ , data da:

$$\omega_i(t) = \frac{d}{dt}m(t).$$

A giustificazione del nome “frequenza istantanea”, osserviamo che se  $m(t) = \omega_0 t + B$ , la frequenza istantanea è costante nel tempo e coincide con la frequenza  $\omega_0$ .

La frequenza istantanea del segnale  $g(t) = A \cos(\omega_0 t + \Delta\omega \int_0^t f(\tau) d\tau)$  modulato in FM risulta:

$$\omega_i(t) = \omega_0 + \Delta\omega f(t).$$

Il segnale modulato ha quindi un incremento di frequenza istantanea proporzionale al segnale in ingresso, ed il coefficiente  $\Delta\omega$  è la costante di proporzionalità; le frequenze istantanee, inoltre, assumono valori in un intorno di  $\omega_0$ , variando da  $\omega_0 - \Delta\omega$  a  $\omega_0 + \Delta\omega$ .

Discutiamo ora brevemente i seguenti due punti:

1. determinare la banda su cui un segnale a banda limitata da  $W$  viene rilocato dalla modulazione in frequenza;
2. determinare un sistema che permetta di ricostruire un dato segnale a partire dal segnale modulato in frequenza (demodulazione).

### Ampiezza della Banda

Abbiamo visto che la AM con parametro  $\omega_0$  riloca un segnale a banda limitata da  $W$  sulla banda centrata intorno a  $\omega_0$  e di larghezza  $2W$ ; lo stesso segnale viene rilocato dalla FM con parametri  $\omega_0$  e  $\Delta\omega$  nella banda di frequenza centrata attorno a  $\omega_0$  e di larghezza  $\Delta$  data dalla regola di Carson (vedi anche Figura 2.25):

$$\Delta = 2W(1 + \beta),$$

con  $\beta = \frac{\Delta\omega}{W}$ .

Due casi particolarmente interessanti sono:

1. *Modulazione in frequenza a banda stretta*, in cui  $\beta \approx 0$  (in pratica  $\beta < 0.2$ ).

In questo caso la regola di Carson dà:

$$\Delta \approx 2W.$$

La FM a banda stretta si comporta quindi come la AM per quanto riguarda l'occupazione di banda.

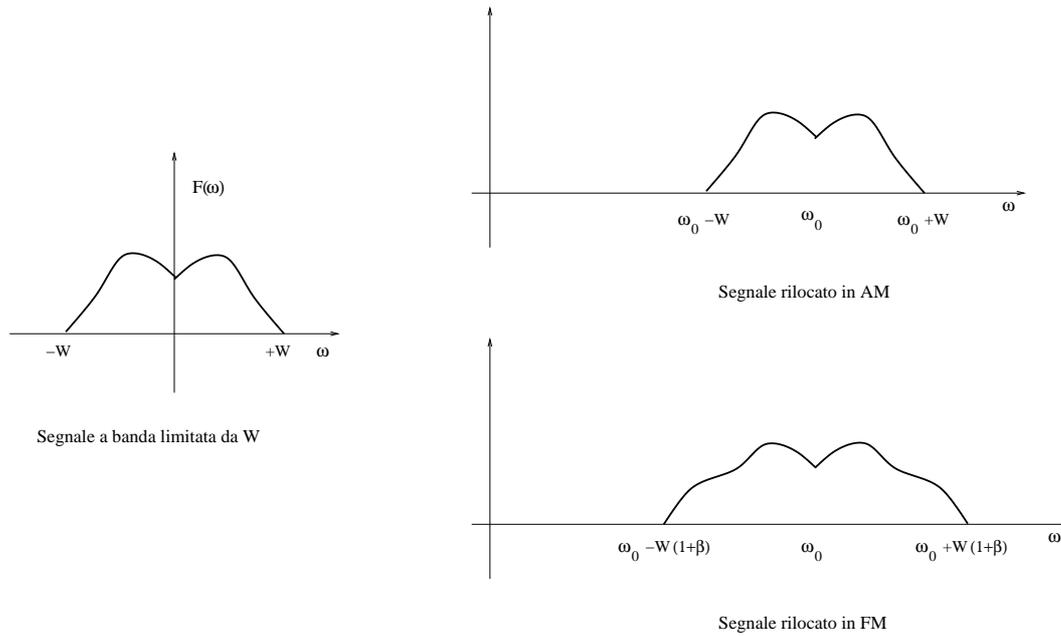


Figura 2.25 Modulazione in AM e in FM.

2. *Modulazione in frequenza a banda larga*, in cui  $\beta \gg 1$ .

In questo caso la regola di Carson dà:

$$\Delta \approx 2W\beta = 2\Delta\omega.$$

Poiché  $\Delta \gg 2W$ , in questo caso la FM utilizza più banda della AM.

Allo scopo di fornire una giustificazione delle precedenti affermazioni, consideriamo un segnale a banda limitata da  $W$  che, per semplicità, scegliamo essere  $\cos Wt$ . Il segnale modulato risulta allora essere:

$$\cos\left(\omega_0 t + \Delta\omega \int_0^t \cos W\tau d\tau\right) = \cos(\omega_0 t + \beta \sin Wt).$$

Applicando la formula trigonometrica del coseno della somma, il segnale modulato può essere infine descritto:

$$\cos \omega_0 t \cos(\beta \sin Wt) - \sin \omega_0 t \sin(\beta \sin Wt). \quad (2.25)$$

La (2.25) mostra che il segnale modulato in frequenza è essenzialmente la somma delle modulazioni in ampiezza dei segnali  $\cos(\beta \sin Wt)$  e  $\sin(\beta \sin Wt)$ : se proviamo che  $\cos(\beta \sin Wt)$  e  $\sin(\beta \sin Wt)$  sono segnali a banda limitata da un opportuno  $M$ , possiamo concludere che il segnale a banda limitata da  $W$  viene rilocato dalla FM nella banda  $\omega_0 - M \leq |\omega| \leq \omega_0 + M$ .

Nel caso della modulazione in frequenza a banda stretta, essendo  $\beta \approx 0$  possiamo approssimare:

$$\cos(\beta \sin Wt) \approx 1, \quad \sin(\beta \sin Wt) \approx \beta \sin Wt.$$

Allora  $M = W$  e l'ampiezza di banda del segnale modulato è  $2W$ , in accordo alla regola di Carson.

Nel caso della modulazione in frequenza a banda larga, si può osservare che le funzioni  $\cos(\beta \sin Wt)$  e  $\sin(\beta \sin Wt)$  sono funzioni periodiche di periodo  $T = 2\pi/W$ . Esse possono essere espresse in serie di Fourier ed approssimate restringendo la serie alle componenti armoniche più significative. Osservando che  $\cos(\beta \sin Wt)$  è una funzione pari e che  $\sin(\beta \sin Wt)$  è una funzione dispari, si ha:

$$\begin{aligned}\cos(\beta \sin Wt) &= J_0(\beta) + \sum_{n \leq 2, n \text{ pari}} J_n(\beta) \cos(nWt), \\ \sin(\beta \sin Wt) &= \sum_{n \leq 1, n \text{ dispari}} J_n(\beta) \cos(nWt),\end{aligned}$$

dove i coefficienti  $J_n(\beta)$ , dipendenti da  $\beta$ , sono:

$$J_n(\beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\beta \sin t - nt)} dt.$$

Le funzioni  $J_n(\beta)$ , dette funzioni di Bessel di prima specie, sono ben studiate per il loro interesse in fisica-matematica. Fissato  $\beta \gg 1$ , è in particolare noto che  $J_n(\beta) \approx 0$  per  $n > \beta$ : la componente armonica di maggior frequenza significativamente presente nelle espansioni in serie di  $\cos(\beta \sin Wt)$  e  $\sin(\beta \sin Wt)$  si ha in corrispondenza di  $n = \beta$ , ed è quindi  $\cos(\beta Wt)$ , con frequenza  $M = \beta W = \Delta\omega$ . Questo implica che, se  $\beta \gg 1$ , la larghezza di banda del segnale modulato è  $2\Delta\omega$ , in accordo con la regola di Carson.

## Demodulazione

La frequenza istantanea del segnale ottenuto modulando in frequenza  $f(t)$  è data da:

$$\omega_i(t) = \omega_0 + \Delta\omega f(t).$$

In altre parole, la frequenza istantanea coincide con  $f(t)$ , a meno di una traslazione e di un fattore di scala.

Per demodulare in frequenza è quindi sufficiente costruire un sistema che, avendo in ingresso un segnale del tipo  $\cos m(t)$ , dà in uscita la sua frequenza istantanea  $\omega_i(t) = \frac{d}{dt} m(t)$ .

Sistemi con questo tipo di comportamento sono detti *discriminatori di frequenza*: in Figura 2.26 viene mostrato il processo di modulazione, trasmissione e demodulazione in frequenza.

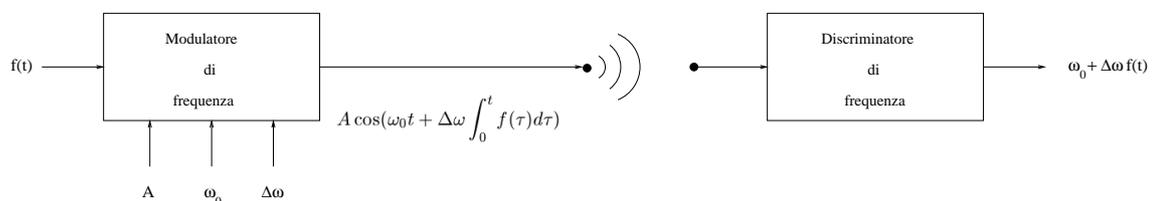


Figura 2.26 Modulatore e discriminatore di frequenza.

In linea di principio, per ottenere un discriminatore di frequenza si può considerare il sistema differenziatore che, avendo in ingresso il segnale  $m(t)$ , dà in uscita il segnale  $\frac{d}{dt} m(t)$ .

Ponendo in ingresso a tale sistema il segnale modulato

$$A \cos \left( \omega_0 t + \Delta\omega \int_0^t f(\tau) d\tau \right),$$

si ottiene in uscita il segnale

$$A(\omega_0 + \Delta\omega f(t)) \sin \left( \omega_0 t + \Delta\omega \int_0^t f(\tau) d\tau \right).$$

Si osservi che questo segnale è il prodotto di una funzione  $m(t) = A(\omega_0 + \Delta\omega f(t))$ , sempre positiva poiché  $\Delta\omega \ll \omega_0$ , per una funzione  $s(t) = \sin(\omega_0 t + \Delta\omega \int_0^t f(\tau) d\tau)$  che è approssimativamente una sinusoidale di frequenza  $\omega_0$ , e più precisamente con frequenze istantanee comprese tra  $\omega_0 - \Delta\omega$  e  $\omega_0 + \Delta\omega$ . La Figura 2.27 evidenzia che il segnale  $m(t)$  corrisponde all'involuppo di  $m(t)s(t)$ .

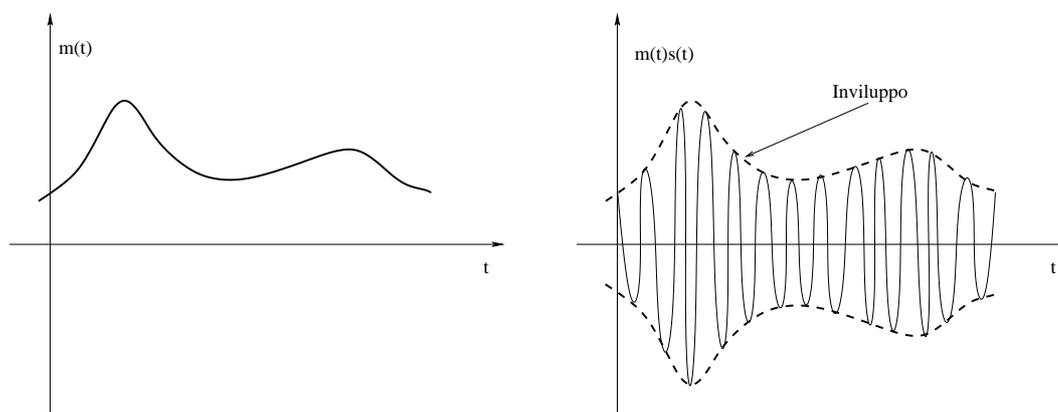


Figura 2.27 Principio per la demodulazione in frequenza.

Il segnale  $m(t)$  può allora essere ricostruito determinando l'involuppo di  $m(t) \sin(\omega_0 t + \Delta\omega \int_0^t f(\tau) d\tau)$  mediante un rivelatore di involuppo del tipo di quello rappresentato in Figura 2.24. Un discriminatore di frequenza può quindi essere ottenuto dalla composizione di un differenziatore e di un rivelatore di involuppo.

### Esempio 2.8.1.

Le trasmissioni radio commerciali in modulazione di frequenza avvengono in banda VHF, cioè con frequenze comprese tra 30 MHz e 300 MHz.

L'indice di modulazione utilizzato  $\Delta f (= \frac{\Delta\omega}{2\pi})$  è di 75 kHz e ogni stazione ha a disposizione una banda di 200 kHz: ogni stazione può quindi spedire segnali limitati in frequenza a 15 kHz e modulati in FM a banda larga.

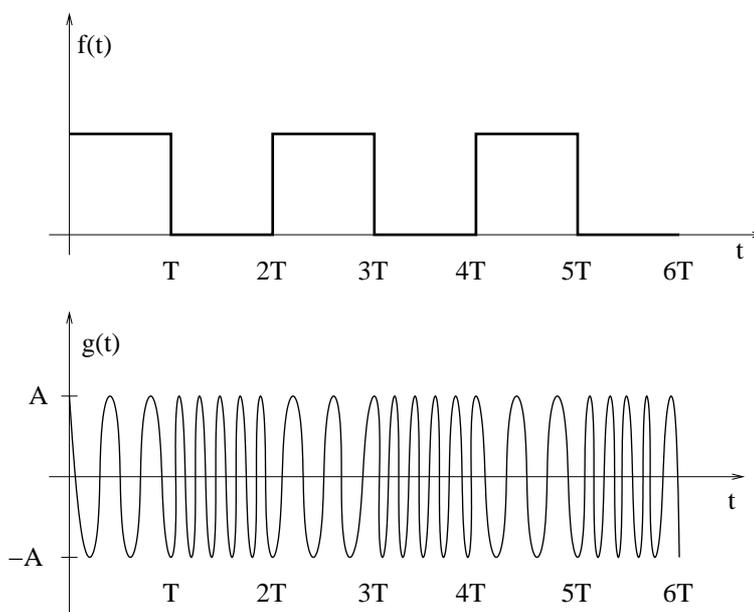
Infatti, per tali segnali,  $\beta = \frac{75}{15} = 5$ , quindi la modulazione è a banda larga; applicando inoltre la regola di Carson, il segnale viene rilocato su una banda di larghezza uguale a  $2 \cdot 15 \cdot (1 + 5) = 180$  kHz, minore della banda di 200 KHz disponibile.

**Esempio 2.8.2.**

Quando la modulazione in frequenza è utilizzata per la trasmissione di segnali digitali (segnali a due valori, per esempio 0 e 1), la tecnica di modulazione viene detta FSK (*frequency shift keying*). La modulazione FSK è realizzata dal sistema che, avendo in ingresso un segnale  $f(t)$  a valori 0 o 1, dà in uscita il segnale  $g(t)$  tale che:

$$g(t) = \begin{cases} A \cos \omega_1 t, & \text{se } f(t) = 1 \\ A \cos \omega_2 t, & \text{se } f(t) = 0. \end{cases}$$

In Figura 2.28 viene riportata la modulazione FSK  $g(t)$  del segnale  $f(t)$  consistente in una sequenza alternata di 1 e 0; si assume che  $\omega_1 = \frac{4\pi}{T}$  e  $\omega_2 = \frac{8\pi}{T}$ .



**Figura 2.28** Modulazione FSK.

La massima frequenza  $W$  significativamente presente nel segnale  $f(t)$  è  $W = \frac{4\pi}{T}$ . La larghezza di banda su cui viene rilocato  $f(t)$  è ottenuta osservando che la frequenza istantanea  $\omega_i(t)$  assume i due valori  $\omega_1 = \omega_0 - \Delta\omega$  e  $\omega_2 = \omega_0 + \Delta\omega$ .

Ne consegue che  $\omega_0 = \frac{6\pi}{T}$  e  $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$ ; poichè  $\beta = \frac{\Delta\omega}{W} = \frac{1}{2}$ , applicando la regola di Carson si ricava che la larghezza di banda  $BW$  è approssimativamente:

$$BW = 2W(1 + \beta) \approx \frac{12\pi}{T}.$$

Esistono vari metodi di demodulazione per segnali modulati FSK. Una semplice tecnica, illustrata in Figura 2.29, consiste nell'applicare al segnale modulato in parallelo due filtri passa-banda centrati rispettivamente su  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , e nel confrontare gli involucri dei segnali così ottenuti.

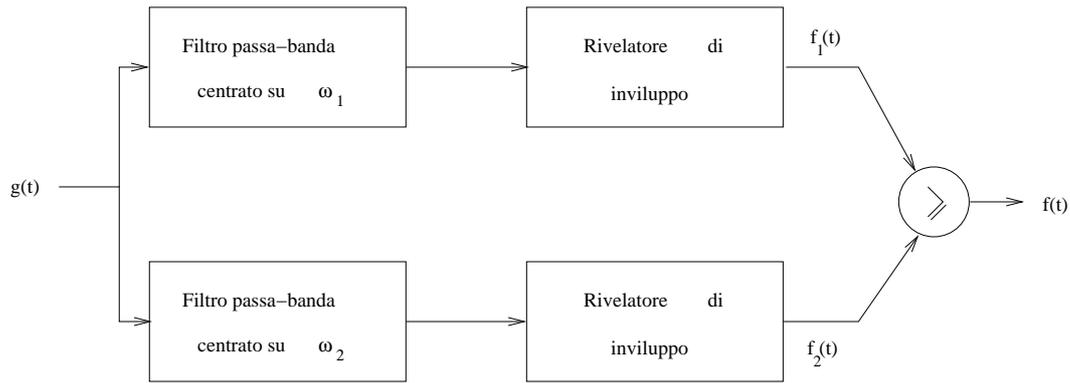


Figura 2.29 Demodulazione di un segnale modulato FSK.

## Problemi

P 2.1 Data la serie armonica

$$f(t) = \cos 2t + 3 \cos 4t,$$

mostrare che i coefficienti di Fourier in forma esponenziale sono:

$$c_0 = 0, \quad c_1 = 0.5, \quad c_2 = 1.5, \quad c_k = 0 \quad \forall k \geq 3.$$

P 2.2 Considerare la serie di Fourier per le seguenti funzioni periodiche

$$f(t) = \sin 4t + 3 \cos 8t + 5,$$

$$f(t) = \sin^2 t + 2 \cos t$$

$$f(t) = \cos^2 t,$$

$$f(t) = \cos 2t$$

$$f(t) = \sin 2t + 3 \cos t,$$

$$f(t) = (\sin 2t)(\cos t)$$

Per ognuna dare i coefficienti della serie di Fourier in forma esponenziale e in forma trigonometrica combinata.

P 2.3 Determinare quali funzioni tra quelle date di seguito possono essere espresse in serie di Fourier.

$$f(t) = \sin 5t + \cos 3t$$

$$f(t) = \cos 6t + \sin 8t$$

$$f(t) = \cos t + \sin \pi t$$

$$f(t) = x_1(t) + x_2(t), \quad \text{dove } x_1(t) = \sin \frac{\pi t}{6}, x_2(t) = \sin \frac{\pi t}{9}$$

Solo per quelle rappresentabili dare i coefficienti della serie di Fourier in forma esponenziale e in forma trigonometrica combinata.

P 2.4 Un segnale periodico  $f(t)$  è espresso in serie di Fourier da

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega_0 t}.$$

Mostrare che la serie di Fourier per  $g(t) = f(t - t_0)$  è data da

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{c}_n e^{in\omega_0 t},$$

dove  $|\hat{c}_n| = |c_n|$  e  $\angle \hat{c}_n = \angle c_n - n\omega_0 t_0$ .

**P 2.5** Calcolare la trasformata di Fourier dei segnali:

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{-2(t-1)}u(t-1), & f(t) &= e^{-2|t-1|} \\ f(t) &= \delta(t-1) + \delta(t+1), & f(t) &= \frac{d}{dt}\{u(-2-t) + u(t-2)\} \end{aligned}$$

e disegnare il grafico del modulo.

**P 2.6** Calcolare la trasformata inversa di Fourier di:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{i\omega}{(1+i\omega)(3+i\omega)}, \\ F(\omega) &= \frac{2+i\omega}{(1+i\omega)^2(3+i\omega)}, \\ F(\omega) &= 2\pi\delta(\omega) + \pi\delta(\omega+4\pi) + \pi\delta(\omega-4\pi). \end{aligned}$$

**P 2.7** Si consideri il segnale  $f(t) = (1+i)e^{2|t|/T+i2\pi|t|/T}$ , dove  $t \in R$  e  $T$  è una costante positiva. Calcolare l'energia di  $f(t)$ .

