

RISPOSTA DI SISTEMI A SEGNALI CASUALI E MODELLI DI RUMORE

Questo capitolo è dedicato allo studio della risposta di sistemi lineari tempo-invariante a segnali casuali e all'analisi di modelli di rumore.

Nel primo paragrafo si studia la risposta di sistemi LTI a processi stazionari; la funzione di autocorrelazione e lo spettro di potenza del segnale di uscita sono espressi in termini di caratteristiche del sistema (risposta all'impulso, funzione di trasferimento) e autocorrelazione e spettro di potenza del segnale d'ingresso. Questi concetti vengono applicati a modelli di rumore stazionario (rumore bianco e colorato), alla modellazione della distorsione in un canale di comunicazione e alla modulazione d'ampiezza di segnali casuali.

Viene presentato nel secondo paragrafo un esempio di rumore non stazionario: il rumore impulsivo. Viene in particolare analizzato il caso di rumore impulsivo additivo, derivando le caratteristiche del rapporto segnale-rumore. Viene infine discusso un filtro non lineare, il filtro mediano, per l'attenuazione di rumore impulsivo.

10.1 Risposta di Sistemi a Segnali Casuali

Abbiamo visto come un segnale casuale possa essere modellato con un processo stocastico $X(t)$. Fissata ora un realizzazione r del processo, $X(t, r)$ può essere visto come un segnale deterministico: indicando con $Y(t, r)$ la risposta del sistema \mathcal{S} alla realizzazione r del

processo, possiamo concludere che il sistema S trasforma il processo $X(t, r)$ nel processo $Y(t, r)$.

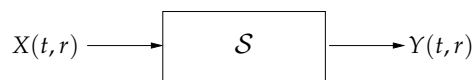


Figura 10.1 Relazione ingresso-uscita del sistema S .

Se il sistema S è lineare e tempo-invariante ed h è la risposta di S alla funzione impulsiva, possiamo in particolare affermare che:

$$Y(t, r) = \int_{-\infty}^{\infty} X(u, r)h(t - u)du.$$

Spesso di un processo $X(t)$ siamo in grado di conoscere solo alcune sue statistiche (media M_X , funzione di autocorrelazione R_{XX} , spettro di potenza S_{XX}). Risulta allora interessante risolvere il seguente problema: dato un sistema S e il processo di ingresso $X(t)$, cercare di esprimere (se possibile) una statistica sulla risposta $Y(t)$ in funzione della stessa statistica su $X(t)$.

Nel caso della media, questo è possibile; si ha infatti:

Fatto 10.1. *Se S è lineare e tempo invariante, allora:*

$$M_Y = M_X * h,$$

cioè la media di fase del processo di uscita è la convoluzione della media di fase del processo di ingresso con la risposta h del sistema alla funzione impulsiva.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} M_Y &= E[Y(t, r)] \\ &= E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} X(u, r)h(t - u)du\right] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} E[X(u, r)]h(t - u)du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} M_X(u)h(t - u)du. \end{aligned}$$

□

Per processi stazionari, la funzione di autocorrelazione R_{YY} del processo di uscita è esprimibile in termini della funzione di autocorrelazione R_{XX} del processo di ingresso, come dato in:

Fatto 10.2. *Se S è lineare e tempo invariante e $X(t)$ è stazionario, allora la risposta $Y(t)$ è un processo stazionario e le funzioni di autocorrelazione di $X(t)$ e $Y(t)$ sono legate da:*

$$R_{YY}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(\tau - s + u)h(s)h(u)duds.$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
R_{YY}(\tau) &= E[Y(t)Y(t+\tau)] \\
&= E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} X(t-u,r)h(u) du \int_{-\infty}^{+\infty} X(t+\tau-s,r)h(s) ds\right] \\
&= E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X(t+\tau-s,r)X(t-u,r)h(u)h(s) du ds\right] \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E[X(t+\tau-s,r)X(t-u,r)]h(u)h(s) du ds \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(\tau-s+u)h(u)h(s) du ds.
\end{aligned}$$

□

Poiché in base al risultato precedente la funzione di autocorrelazione dell'uscita $Y(t)$ è funzione della funzione di autocorrelazione dell'ingresso $X(t)$, lo spettro di potenza di $Y(t)$ sarà funzione dello spettro di potenza di $X(t)$. In questo caso la dipendenza assume una forma particolarmente semplice:

Fatto 10.3. Se S è lineare e tempo invariante con funzione di trasferimento $H(\omega)$ e $X(t)$ è stazionario, allora la risposta $Y(t)$ è un processo stazionario e gli spettri di potenza di $X(t)$ e di $Y(t)$ sono legati da:

$$S_{YY}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{XX}(\omega).$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
S_{YY}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{YY}(t)e^{-i\omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(t-s+u)e^{-i\omega t} h(u)h(s) du ds dt.
\end{aligned}$$

Ponendo $z = t - s + u$, si ottiene:

$$\begin{aligned}
S_{YY}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(s)e^{i\omega s} ds \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)e^{-i\omega u} du \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(z)e^{-i\omega z} dz \\
&= \overline{H}(\omega)H(\omega)S_{XX}(\omega) \\
&= |H(\omega)|^2 S_{XX}(\omega).
\end{aligned}$$

□

Dati due processi congiuntamente stazionari $X(t)$ e $Y(t)$, dove $Y(t)$ è la risposta di un sistema S LTI avente $X(t)$ come ingresso, la funzione di crosscorrelazione $R_{XY}(\tau)$ è

$$\begin{aligned}
R_{XY}(\tau) &= E[X(t)Y(t+\tau)] \\
&= E\left[X(t) \int_{-\infty}^{+\infty} X(t+\tau-s)h(s) ds\right] \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(\tau-s)h(s) ds.
\end{aligned}$$

Lo spettro di potenza incrociato $S_{XY}(\omega)$ di un processo $X(t)$ e della risposta $Y(t)$ del sistema S sollecitato dal processo $X(t)$ è dato dal seguente risultato:

Fatto 10.4. Se S è lineare e tempo invariante con funzione di trasferimento $H(\omega)$ e $X(t)$ è stazionario, allora la risposta $Y(t)$ è un processo stazionario e lo spettro di potenza incrociato $S_{XY}(\omega)$ è dato da:

$$S_{XY}(\omega) = H(\omega)S_{XX}(\omega).$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} S_{XY}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XY}(t)e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(t-s)e^{-i\omega t} h(s) ds dt. \end{aligned}$$

Ponendo $z = t - s$, si ottiene:

$$\begin{aligned} S_{XY}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(s)e^{-i\omega s} ds \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(z)e^{-i\omega z} dz \\ &= H(\omega)S_{XX}(\omega). \end{aligned}$$

□

Esempio 10.1.1.

Rumore bianco e rumore colorato. Si definisce *rumore bianco* un processo stocastico $N(t)$ che ha spettro di potenza costante a tutte le frequenze per cui, quindi, vale:

$$S_{NN}(\omega) = N_0/2.$$

Il rumore bianco additivo modella bene il rumore termico, derivato dalle fluttuazioni delle molecole nell'aria e dagli elettroni nei resistori, fino a frequenze dell'ordine di 10^{13} Hz. In questo caso $N_0 = kT$, dove T è la temperatura assoluta.

Un rumore caratterizzato da uno spettro di potenza a banda limitata o comunque non costante viene detto *colorato*, in analogia al fatto che la luce colorata possiede solo una banda di frequenze nel visibile. Ad esempio, la risposta di un sistema con funzione di trasferimento $H(\omega)$ a un rumore bianco a temperatura ambiente (290°K) è un rumore colorato con spettro di potenza $290^\circ\text{K} \cdot |H(\omega)|^2$.

Esempio 10.1.2.

Determinazione della risposta alla funzione impulsiva. Dato un sistema lineare tempo-invariante S per cui $h(t)$ è la risposta all'impulso $\delta(t)$, il seguente sistema permette di stimare $h(t)$:

Essendo $S_{NN}(\omega) = N_0/2$, indicando con $H(\omega)$ la funzione di trasferimento di S , lo spettro di potenza incrociato tra X e la risposta Y del sistema S è, da fatto 10.4:

$$S_{NY}(\omega) = H(\omega)\frac{N_0}{2}.$$

La antitrasformata di Fourier dello spettro di potenza incrociato $S_{NY}(\omega)$ è la funzione di cross-correlazione $R_{NY}(t)$, così come la antitrasformata di Fourier della funzione di trasferimento $H(\omega)$ è la risposta all'impulso $h(t)$; si ottiene allora:

$$R_{NY}(t) = h(t)\frac{N_0}{2}.$$

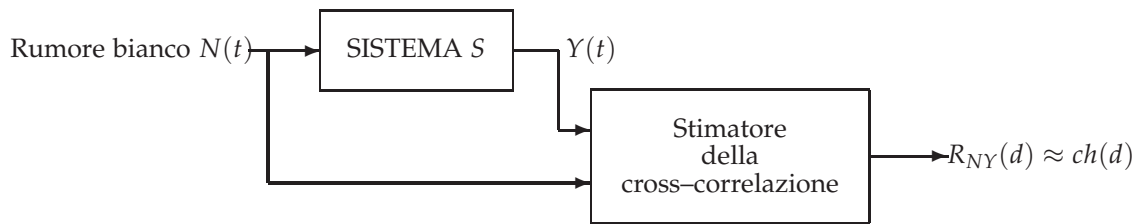


Figura 10.2 Stima della risposta all'impulso.

Esempio 10.1.3.

Modello di distorsione in un canale di comunicazione. La distorsione in un canale di comunicazione può essere modellata da una combinazione di un filtro lineare e una sorgente di rumore additivo, così come illustrato nel seguente: Se $N(t)$ e $X(t)$ sono

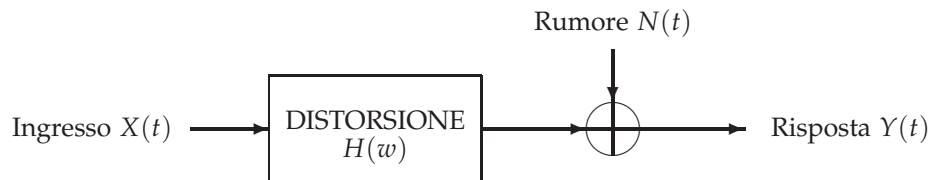


Figura 10.3 Modello di canale di comunicazione.

stazionari e scorrelati e $N(t)$ ha media 0, allora:

$$S_{YY}(\omega) = |H(\omega)|^2 \cdot S_{XX}(\omega) + S_{NN}(\omega).$$

Esempio 10.1.4.

Modulazione di ampiezza. La modulazione di ampiezza, o AM, è stata introdotta nella Sezione 2.7.1. Se $X(t)$ è un processo stocastico a tempo continuo e stazionario in senso lato, a media nulla e funzione di autocorrelazione $R_{XX}(t)$, allora il processo in uscita

$$Y(t) = A \cos \omega_0 t X(t)$$

è chiamato modulazione in ampiezza con portante sinusoidale. Poiché il sistema non è tempo-invariante, il processo $Y(t)$ non è in generale stazionario. Nonostante ciò, è ugualmente possibile determinare una dipendenza funzionale tra lo spettro di potenza di $Y(t)$ e quello di $X(t)$:

$$S_{YY}(\omega) = \frac{A^2}{4} (S_{XX}(\omega - \omega_0) + S_{XX}(\omega + \omega_0)).$$

10.2 Rumore Impulsivo

Nel precedente paragrafo abbiamo visto come alcuni processi stocastici stazionari possano modellare certi disturbi di trasmissione (rumore bianco e colorato). Vogliamo invece qui introdurre un modello di rumore non stazionario, detto *rumore impulsivo*, che modella disturbi di alta intensità ma di durata relativamente breve causati, ad esempio, dall'accensione di dispositivi o da click di computer.

Un rumore impulsivo può essere modellato attraverso un processo stocastico a tempo discreto $I(t)$ espresso da:

$$I(t) = N(t)b(t),$$

dove $N(t)$ è un processo stocastico stazionario e $b(t)$ una sequenza di 0 e 1; ovviamente il rumore può essere attivo al tempo t soltanto se $b(t) = 1$.

La sequenza $b(t)$ può essere ottenuta da una realizzazione di una catena di Markov a due stati (stato inattivo 0 e stato attivo 1), caratterizzata dalla seguente matrice stocastica P :

$$P = \begin{bmatrix} 1 - \beta & \beta \\ 1 - \alpha & \alpha \end{bmatrix}.$$

Questo significa che, la probabilità che la catena si trovi in un dato stato al tempo $t + 1$ dipende solo dallo stato in cui si trova al tempo t . Detto $b(t)$ lo stato della catena al tempo t , valgono:

$$\begin{aligned} \Pr [b(t+1) = 0 \mid b(t) = 0] &= 1 - \beta \\ \Pr [b(t+1) = 1 \mid b(t) = 0] &= \beta \\ \Pr [b(t+1) = 1 \mid b(t) = 1] &= \alpha \\ \Pr [b(t+1) = 0 \mid b(t) = 1] &= 1 - \alpha \end{aligned}$$

Un importante parametro della sequenza $b(t)$ è la frequenza f dello stato attivo 1, cioè la media temporale di $b(t)$:

$$f = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sum_{t=1}^T b(t)}{T}.$$

Allo scopo di stimare f , denotiamo con $p_k(t)$ la probabilità che al tempo t il processo sia nello stato k ($k = 0, 1$); ponendo ora $\pi(t) = [p_0(t), p_1(t)]$, si verifica facilmente per induzione che:

$$\pi(t) = \pi(0)P^t.$$

Se $0 < \alpha < 1$ e $0 < \beta < 1$, il processo indotto dalla catena di Markov è ergodico e la distribuzione limite stazionaria $[p_0, p_1] = \lim_{t \rightarrow +\infty} \pi(t)$ può essere calcolata da:

$$[p_0, p_1] = [p_0, p_1]P.$$

Questo implica in particolare che $p_1 = p_0\beta + p_1\alpha$; ricordando che $p_0 + p_1 = 1$ si conclude che $p_1 = \frac{\beta}{(1+\beta-\alpha)}$.

Vale quindi il seguente:

Fatto 10.5. Per quasi tutte le realizzazioni, la percentuale di tempo f in cui il processo $b(t)$ si trova nello stato attivo (cioè 1) è $\frac{\beta}{(1+\beta-\alpha)}$.

In generale un rumore impulsivo $I(t)$ è un processo stocastico non stazionario. La non stazionarietà di tale processo può essere mostrata provando che la funzione di autocorrelazione $E[I(t)I(t+\tau)]$ viene a dipendere esplicitamente da t .

Supponiamo, per semplicità, che $N(t)$ sia un rumore bianco scorrelato, cioè che $E[N(t)] = 0$ e con funzione di autocorrelazione $E[N(t)N(t+\tau)] = \sigma^2\delta(\tau)$, dove σ^2 è la varianza di $N(t)$. Sotto questa ipotesi vale:

$$\begin{aligned} E[I(t)I(t+\tau)] &= E[N(t)b(t)N(t+\tau)b(t+\tau)] \\ &= E[N(t)N(t+\tau)]E[b(t)b(t+\tau)] \\ &= \sigma^2\delta(\tau)b(t), \end{aligned}$$

dove $\delta(\tau)$ è 0 per $\tau \neq 0$, altrimenti è 1. Il fatto che la funzione di autocorrelazione dipenda esplicitamente da t dimostra la natura non stazionaria del rumore impulsivo.

Lo spettro di potenza $S_{II}(\omega, t)$ si ottiene come trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione, e vale quindi:

$$S_{II}(\omega, t) = \sigma^2 b(t).$$

10.2.1 Rumore Impulsivo Additivo

Un segnale $X(t)$, contaminato da rumore impulsivo additivo $I(t) = N(t)b(t)$, viene trasformato nel processo $Y(t) = X(t) + I(t)$. Indicando con P_N e con $P_X(t)$ rispettivamente la potenza del rumore $N(t)$ e del segnale $X(t)$ al tempo t , il rapporto segnale-rumore istantaneo SINR(t) (Signal to Impulsive Noise Ratio) può essere definito da:

$$\text{SINR}(t) = \frac{P_X(t)}{b(t)P_N}.$$

Analogamente il rapporto segnale-rumore SINR può essere definito come il rapporto tra la potenza media P_X del segnale relativa ad un intervallo di tempo sufficientemente grande e la potenza media P_I del rumore relativa ad un intervallo di tempo sufficientemente grande. Considerando l'intervallo di tempo infinito:

$$\text{SINR} = \frac{(\lim_{T \rightarrow +\infty} \sum P_X(t))/T}{(\lim_{T \rightarrow +\infty} \sum P_N b(t))/T}.$$

Vale:

$$P_I = \frac{\lim_{T \rightarrow +\infty} \sum P_N b(t)}{T} = P_N \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sum_{t=1}^T b(t)}{T} = P_N f = P_N \frac{\beta}{(1 + \beta - \alpha)}.$$

Possiamo pertanto concludere:

$$\text{SINR} = \frac{P_X}{P_N} \frac{(1 + \beta - \alpha)}{\beta}.$$

Spesso sono presi in considerazione modelli in cui $\beta = \alpha$. In tal caso $f = \alpha$ e:

$$\text{SINR} = \frac{P_X}{\alpha P_N}.$$

10.2.2 Eliminazione di Rumore Impulsivo Additivo

In questo paragrafo discutiamo una tecnica per attenuare un rumore impulsivo additivo, basata su un filtro non lineare, detto *filtro mediano*.

Dato un vettore $x = [x_1, \dots, x_n]$ di dimensione $n = 2k + 1$, la mediana $\text{med}(x)$ di x è un elemento x_s di x tale che almeno k elementi di x sono minori o uguali a x_s e almeno k elementi di x sono maggiori o uguali a x_s . In altre parole, la mediana di un vettore è quell'elemento che, dopo aver ordinato il vettore, si trova in posizione centrale.

Il filtro mediano MED di finestra di lunghezza k è un sistema che trasforma un segnale $f(t)$ in un segnale $g(t) = \text{MED}(f(t))$ tale che:

$$g(t) = \text{med}(f(t-k), \dots, f(t), \dots, f(t+k)).$$

Contrariamente alla media, il filtro mediano è un operatore chiaramente non lineare, poiché in generale $\text{MED}(x(t) + y(t)) \neq \text{MED}(x(t)) + \text{MED}(y(t))$. Tale sistema non è inoltre causale, in quanto la risposta al tempo t può dipendere da valori dell'ingresso a tempi $t' > t$. Questo operatore possiede tuttavia la proprietà, molto utile in questo contesto, di non essere sensibile a valori inusualmente grandi: ampliando arbitrariamente una componente maggiore della mediana, la mediana non cambia.

Un'importante proprietà del filtro mediano è quella di preservare molte discontinuità del segnale: questo è particolarmente utile nell'elaborazione di immagini, dove il filtro mediano può essere usato per rimuovere rumore impulsivo sull'immagine, senza modificare i contorni. Per contro, l'applicazione di filtri mediani per l'eliminazione di rumore impulsivo a segnali audio non produce in generale ricostruzione audio di alta qualità. Questo è principalmente dovuto al fatto che il filtro mediano, pur essendo in grado di eliminare impulsi di breve durata dovuti al rumore, introduce in generale distorsioni sui campioni di segnale corretti, come mostrato in Figura 10.4.

Le distorsioni introdotte dal filtro mediano possono essere ridotte con l'impiego di una soglia adattativa, così che il campione al tempo t viene rimpiazzato dalla mediana solo se la differenza tra il campione stesso e la mediana supera la soglia:

$$g(t) = \begin{cases} f(t) & \text{se } |g(t) - \text{med}(f(t-k), \dots, f(t+k))| < \eta\theta(t), \\ \text{med}(f(t-k), \dots, f(t+k)) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Qui η è un parametro, mentre $\theta(t)$ è una soglia adattativa che può essere calcolata attraverso una stima della media di $|g(t) - \text{med}(f(t-k), \dots, f(t+k))|$.

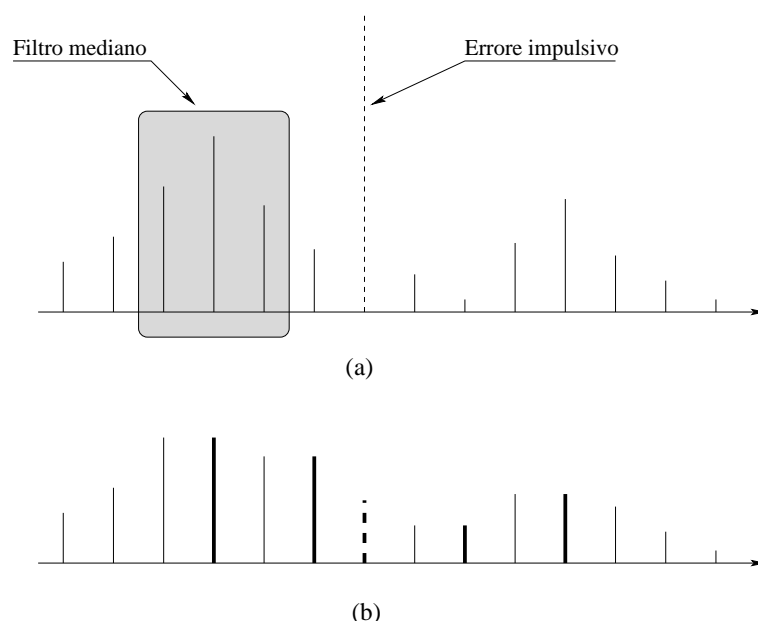


Figura 10.4 Segnale di ingresso (a) e segnale di uscita (b) di un filtro mediano. Il filtro elimina il rumore impulsivo (campione tratteggiato in (a)), ma alcuni campioni corretti vengono distorti (campioni in neretto in (b)).

